SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XIX. — (Anno XCI).

gennaio - dicembre 1952

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO GUGLIELMO GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 22-568
1952

Pubblicato il 6 febbraio 1953

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV. — VOL. XIX. — (Anno XCI)

gennaio - dicembre 1952

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO G. GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 22.568
1952

RELAZIONE

SUI LAVORI COMPIUTI

DALL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

DURANTE L' ANNO 1951

letta nell' adunanza plenaria del dì 31 gennaio 1952

dal socio segretario **Geremia D' Erasmo**

Anno di normale operosità, quello testè decorso, in cui con ritmo costante e con attività non rallentata l' Accademia delle scienze fisiche e matematiche ha aggiunto una novella pietra al secolare edifizio del suo glorioso passato. Ne sono palese testimonianza la pubblicazione di un nuovo volume del Rendiconto — il XVIII della serie 4ª, ricco di 300 pagine, con 62 figure intercalate e 8 tavole fuori testo, che contiene 32 note di soci e di estranei —, la stampa di due memorie inserite nel volume in corso degli Atti, e parecchie altre manifestazioni di attività, delle quali sarà detto assai brevemente qui appresso.

Seguendo, in questa sommaria rassegna dei lavori accademici, l' ordine consueto, che li elenca cominciando dai contributi astronomici e matematici, citerò anzitutto una nota del socio corrispondente Attilio Colacevich, sopra *Un problema di ottica strumentale in astronomia.* Viene studiato, in essa, il tipo di strumento più adatto, da applicare nella parte bassa del telescopio, quando esso debba servire unicamente da condensatore di flusso di radiazione, flusso che va poi ad alimentare qualche strumento di analisi.

Fra i numerosi lavori riguardanti le matematiche pure, sono da ricordare, nel campo geometrico, quattro note del socio Spampinato, due delle quali rappresentano, come VII e VIII contributo, la continuazione di precedenti indagini riflettenti le *Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n dell' S_r proiettivo complesso.* Si introduce, nella prima di esse, il tipo generale di determinazione di una ipersuperficie W_{r-1} dell' S_r proiettivo complesso, con l' indice di algebricità n, con la funzione numerica ad essa legata (ad n valori razionali relativi) definita in un insieme più generale di quelli finora usati. E, nella seconda nota, si introducono nell' S_r proiettivo complesso le falde t-dimensionali generali, con l' origine del sostegno di una varietà unirazionale. Tali enti intervengono quando si vuole fissare la determinazione birazionale di una varietà

algebrica ordinaria, e nella determinazione generale delle W_{h-1} di indice di algebricità n di una varietà algebrica ordinaria.

In una terza nota, dal titolo *Ipersuperficie e t-ipersuperficie di un S_r ipercomplesso,* s' introducono le generalità relative ad una ipersuperficie o t-ipersuperficie, con $1 < t \leq n$ di un S_r ipercomplesso, legato ad un' algebra complessa, commutativa dotata di modulo, di ordine n qualunque.

E nella quarta si determinano le *forme esplicite delle funzioni sen $\mathfrak{z}$*, cos $\mathfrak{z}$, e^{z} con $\mathfrak{z}$ variabile in un dato tipo di algebra definita nel corpo complesso, dotata di modulo.

Al consocio ZAPPA è dovuta una nota, *Determinazione degli elementi neutri nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo finito,* nella quale si risolve il problema, proposto da G. BIRKHOFF, di determinare tutti gli elementi neutri nel reticolo formato da tutti i sottogruppi in un gruppo finito.

In un campo affine di indagini, il dott. Donato GRECO, autore di una nota sopra *I gruppi finiti che sono somma di quattro sottogruppi,* ha assegnato le condizioni necessarie e sufficienti perchè in un gruppo finito G esistano quattro sottogruppi propri tali che ogni elemento di G appartenga ad almeno uno di essi.

In una nota *Sulla rappresentazione generale delle algebre doppie dotate di modulo* il dott. Ulderico BENCIVENGA ha esteso ai numeri bicomplessi le teorie svolte sui numeri bireali in una precedente memoria pubblicata nei nostri Atti nell' anno 1942.

E su *L' Algebra A somma diretta di K algebre n_i-duali* ha indagato il dott. Angelo FADINI, dimostrando che l' S_r ipercomplesso legato a tale algebra si può rappresentare mediante una particolare varietà di SEGRE.

Nel campo dell' analisi matematica è da ricordare anzitutto una nota del socio MIRANDA *Sulla sommabilità delle derivate di una funzione armonica Hölderiana,* in cui si dimostra che una funzione armonica di n variabili, hölderiana, con esponente μ in un dominio sufficientemente regolare, ammette derivate parziali prime di potenza p-esima sommabile con $p < 1\ (1-\mu)$.

Di *una quistione relativa alle strutture distributive* si è occupato, in una nota, il dott. Giorgio TREVISAN, definendo una struttura distributiva, dotata di alementi O ed I, come un sistema algebrico con una operazione ternaria, assoggettando tale operazione a condizioni formalmente differenti da quelle già date da altri autori.

Al dott. Fernando BERTOLINI è dovuto un lavoro, nel quale si dimostra che *la trasformata di Laplace di ordine $\alpha > -1$,* così come la trasformata ordinaria, ha per campo di convergenza un semipiano.

Ed infine è da ricordare uua nota del dott. Antonio ZITAROSA, nella quale si dimostra la *formula di inversione per la trasformata di Hankel* con nuove ipotesi sul comportamento della funzione trasformandola all' in-

finito, e con interessanti risultati, che possono tornare assai utili nelle applicazioni.

Passando dal campo delle matematiche pure a quello delle applicazioni, citiamo anzitutto cinque lavori di scienza delle costruzioni. Due sono dovuti all'ing. Aldo RAITHEL. Nel primo di essi, *Sulla determinazione delle linee di influenza nei sistemi ad alto grado di iperstaticità*, si espone un metodo oltremodo semplice e sintentico, che riconduce il problema ad una applicazione del metodo di CROSS, e si riporta un'applicazione numerica del procedimento per una trave solidale coi piedritti con la relativa tabellazione delle ordinate della linea d'influenza. Nel secondo, riflettente *Un metodo di iterazione per la trave continua su mezzo elastico*, messa in rilievo l'importanza che nella tecnica corrente riveste lo studio delle travi di fondazione, con le relative difficoltà che presenta la soluzione esatta del problema, viene esposto un metodo di calcolo di successive approssimazioni estremamente convergente, che consente di pervenire rapidamente alla soluzione effettiva. Anche questo lavoro si chiude con un'applicazione numerica ad un caso corrente, riportando la tabellazione delle costanti numeriche necessarie allo sviluppo dei calcoli.

Un terzo lavoro, dovuto al dott. Vincenzo FRANCIOSI, *In tema di archi sottili in regime viscoso*, tratta il problema della correzione della caduta di spinta per sforzo normale mediante una distorsione applicata alle imposte, tenendo conto delle sollecitazioni supplementari generate dalle deformazioni e del comportamento viscoso del materiale.

Un utile *Contributo al calcolo delle strutture scatolari*, che tanta importanza vanno acquistando nell'attuale tecnica delle costruzioni, è rappresentato dalla nota del dott. Elio GIANGRECO, in cui si propone un procedimento di calcolo di dette strutture che, allontanandosi dagli schemi usuali, tiene conto del comportamento di ciascun foglio come lastra, il che accade sempre che le dimensioni di ciascun foglio siano pressochè uguali. In base alla conoscenza della funzione di AIRY si determina lo stato tensionale dei singoli fogli, e si perviene ad equazioni perfettamente analoghe a quelle dei tre tagli che si stabiliscono con la teoria ordinaria.

L'analogia fra le leggi di propagazione dei momenti flettenti nei telai iperstatici e le leggi della propagazione della corrente elettrica in un particolare schema di circuiti serve di base al metodo sperimentale per il calcolo dei telai proposto dall'ing. Ettore MINERVINI in una nota che offre, anche dal punto di vista pratico, notevole interesse. Si dimostra infatti, in questo lavoro, la perfetta identità delle leggi che legano i due fenomeni, da cui consegue la possibilità di sostituire al calcolo analitico la misurazione di grandezze elettriche.

I risultati di particolari ricerche idrauliche sono stati esposti dal dott. Andrea RUSSO SPENA in un *Contributo sperimentale allo studio dell'ef-*

flusso da tubi addizionali cilindrici, che dopo aver descritto i fenomeni osservati in tubi addizionali di vetro di diversa lunghezza, al variare del carico, mette in luce particolari del fenomeno di efflusso finora sconosciuti e contribuisce a chiarire sia l' intimo meccanismo con cui si estrinsecano le dissipazioni di energia nelle correnti in rapida espansione, sia le cause che determinano l' insorgere e l' esaltarsi dei fenomeni di cavitazione.

A speciali indagini di chimica organica si riferisce la nota I del socio Panizzi e del dott. Mario Piattelli, *Sintesi nel campo delle sostanze steroidi,* destinata a descrivere brevemente l' ottenimento, attraverso numerosi composti intermedi, dell' 1-cheto-13-metilperidrofenantrene.

In un campo affine di ricerche, più particolarmente di chimica biologica ed agraria, sono da segnalare due note del prof. Giovanni Petrosini. Nella prima di esse, *Sui rapporti fra acido ascorbico idrojuglone e altri rapido-riducenti nel mallo di noce durante la maturazione del frutto,* l' autore ha potuto dimostrare, con un suo metodo originale, come non tutto l' alto potere riducente del mallo di noce sia da attribuire all' azione della vitamina C, ma in aliquota molto forte spetti pure all' idrojuglone e ad altre sostanze rapido-riducenti. Nella seconda, sopra *La determinazione del D. D. T. nell' olio di oliva,* viene proposto un metodo per la determinazione dei residui di D. D. T. impiegato nelle operazioni di disinfestazione degli oliveti, residui che passando nella polpa delle olive si ritrovano poi negli oli, con danno per la salute dei consumatori. Il nuovo procedimento, che elimina le difficoltose operazioni inerenti alla distruzione della sostanza grassa, proprie degli altri metodi, è basato sul principio della ripartizione di un soluto fra due liquidi non miscibili fra loro, applicato mediante l' uso del cosiddetto campione interno.

Si giunge così ai lavori riguardanti le discipline biologiche.

In una nota *Sulla craniologia dei Sanniti moderni,* il dott. Antonio De Rosa, proseguendo le sue ricerche sul materiale craniologico delle popolazioni sannitiche, ha studiato un centinaio di crani di moderni sanniti e li ha messi a confronto con quelli della necropoli preromana di Alfedena precedentemente studiati, allo scopo di stabilire il comportamento di quel gruppo etnico dopo circa 25 secoli.

In una notevole memoria *Sul fegato grasso fisiologico* il consocio Diamare e il dott. De Girolamo hanno riferito i risultati delle loro ricerche sulla presenza di grasso e di lipoidi nel fegato, presenza che, mentre è notoriamente molto ristretta nell' uomo e nei mammiferi, almeno nelle condizioni normali, costituendo, allorchè si accresce, un fatto degenerativo che si accompagna a particolari condizioni morbose o tossiche, viceversa è così enorme nei vertebrati inferiori, e specialmente nei pesci, da giustificare la qualifica di « fegato grasso fisiologico » adottata dagli autori. Studiato il grasso e il pigmento del fegato normale dei selaci ed esaminati alcuni casi

di fegati piccoli oligolipidici e fortemente pigmentati in *Scylliorhinus catulus*, vengono confrontati con la degenerazione grassa e pigmentaria in patologia e si discutono infine i metodi istologici per riconoscere lipoidi e corpi mielinici e la lipoidosi.

Come negli anni precedenti, anche nel 1951 il decano fra i nostri soci ordinari, Giuseppe De Lorenzo, ha offerto al nostro Rendiconto contributi molteplici nei più svariati campi del pensiero filosofico e dell' osservazione naturalistica. In una nota egli ha messo a confronto alcune *Concezioni del mondo antiche e moderne*, per mostrare che, se esse pur presentano molte differenze analitiche, specifiche, scientifiche, possono anche, a volte, avere grandi somiglianze sintetiche, generiche e filosofiche. Le antiche concezioni del mondo, mitiche, poetiche, filosofiche, intuite da menti somme dei passati secoli o millenni, sono, cioè, stranamente simili alle nuove teorie cosmogoniche, fisicomatematiche, faticosamente acquisite dalle moderne generazioni.

In due altre note, su *Le rondini in Shakespeare,* De Lorenzo ha voluto dimostrare che il *martlet,* descritto da Shakespeare nel *Macbeth* ed in *The Merchant of Venice,* e anche da Pascoli nella prefazione ai suoi *Primi poemetti,* non è, come comunemente si traduce e s' interpreta, il rondone, *Cypselus apus,* e nemmeno la rondine comune o campagnola, *Hirundo rustica* ; ma è, invece, la rondine casalinga o cittadina, *Hirundo urbica* ; che in Italia si chiama rondicchio o balestruccio.

Ed in un' altra nota dal titolo *Tigri antropofaghe,* lo stesso consocio ha preso lo spunto dalla presenza sporadica di tigri antropofaghe, per indicare qual' è la funzione della tigre normale nell' economia rurale e nella vita sociale dell' India, e per illustrare il singolare fenomeno storico, che la tigre solo da poco più di duemila anni ha invaso l' India, prima tutta occupata dal leone, respingendolo e confinandolo sempre più a nord-ovest della penisola, della quale essa ora tiene incontrastata, tra i felini, il supremo dominio.

Passando a considerare per ultimo i contributi geografici, geofisici e geologici, ricorderò una nota del consocio Colamonico riflettente *Alcune caratteristiche del carsismo pugliese.* Vengono in essa messe in rilievo la scarsa diffusione, nelle zolle calcaree pugliesi, delle cavità a doline, la loro maggiore disseminazione in corrispondenza degli orli dei rialti del Gargano, delle Murge e delle Serre, la notevole frequenza della forma chiusa allungata e il particolare comportamento dell' idrografia sotterranea, per concludere con l' ipotesi che l' attuale carsismo pugliese sia da ricollegare con un processo remoto dell' attività carsica, interrotto dalla trasgressione marina plio pleistocenica.

Le *temperature di irrigidimento di attuali lave etnee* sono state misurate dal consocio Imbò, che le ha trovate corrispondenti a 635°, cioè inferiori di quasi 30° rispetto a quelle di precedenti lave. Questa differenza, che è in relazione con le condizioni fisico-chimiche delle masse fluenti e

particolarmente col coefficiente di viscosità, potrebbe spiegare, secondo l'autore, il diverso comportamento dell'eruzione 1950-51 rispetto a quelle del 1923 e del 1947, sia nei riguardi della durata che dell'assenza dei fenomeni parossistici terminali precedenti o concomitanti l'eruzione.

Di alcune *Anomalie climatologiche osservate a Napoli tra il 1948 e il 1950* ha trattato il prof. Eugenio GUERRIERI, mettendo in evidenza, con paragoni dimostrativi e osservazioni statistiche, la siccità eccezionale e persistente durata per nove mesi, dal novembre 1948 al luglio 1949, e le straordinarie ed elevate temperature dell'aria verificatesi nella primavera estiva e nell'estate torrida del 1950.

Ad indagini più particolarmente geologiche ed idrologiche si riferisce la memoria del prof. Alberto DUCCI, *Nuovi contributi geo-idrologici sull'isola di Capri*, recentemente accolta per l'inserzione nel volume degli Atti. Essa ha il triplice interesse di offrire nuovi dati sulla cronologia di quei terreni facendo conoscere, mediante l'esame della microfauna, livelli del Sopracretacico e dell'Oligocene finora non segnalati nell'isola, di comprendere nuove osservazioni batimetriche e morfologiche e di riferire i risultati di uno studio geo-idrologico ricco di dati tecnici e di abbondante documentazione.

Il Rendiconto, che, come di consueto, si apre con la Relazione annuale del Segretario sui lavori dell'anno precedente e si chiude con i processi verbali delle tornate ordinarie, ha pubblicato pure una *Commemorazione del socio Biagio Longo*, letta nell'adunanza del 7 aprile dal collega CATALANO e stampata integralmente insieme col ritratto e l'elenco delle pubblicazioni.

Come negli anni precedenti, l'Accademia non ha mancato di partecipare alle più importanti celebrazioni commemorative e manifestazioni culturali (Convegno internazionale di studi Colombiani a Genova, Centenario della fondazione della Zoologisch-Botanische Gesellschaft di Vienna, Centocinquantesimo anniversario della Société d'encouragement pour l'Industrie nationale di Parigi ecc.). Ha accresciuto i suoi rapporti scientifici con numerosi altri Sodalizi di ogni parte del mondo, stabilendo, fra l'altro, nuovi cambi con la Società dei Matematici e Fisici della Croazia, con la Societas Zoologica et Botanica Fennica « Vanamo » di Helsinki, col *Colloquium mathematicum* di Wroclaw in Polonia, con la Società « Tensor » presso la Facoltà di Scienze dell'Università di Sapporo in Giappone, con l'Istituto di Matematica e Statistica dell'Università di Montevideo, ecc. Ha aggiornato i regolamenti dei diversi premi, la cui aggiudicazione le era stata affidata nel periodo prebellico, ed ha bandito il concorso al premio accademico di L. 50.000 per il biennio 1951-52 sul tema « *Contributo alla mineralogia vulcanica della Campania* » con scadenza al 31 ottobre 1952.

Se queste sono state le più importanti manifestazioni di vita accademica

durante il decorso anno, occorre ancora accennare alle recenti variazioni nella compagine sociale, per avere un quadro preciso e completo dell' attività del nostro Sodalizio durante il 1951.

Alla carica di vice-presidente per il 1952 fu chiamato il socio Umberto PIERANTONI e a quella del tesoriere per il triennio 1952-54 il socio Antonio SCHERILLO.

Nello scorso giugno venne eletto socio straniero nella sezione di Scienze naturali il prof. Paolo BUCHNER, già titolare di Zoologia nell' Università di Lipsia, e furono nominati soci ordinari residenti nella sezione delle Scienze matematiche i proff. Carlo TOLOTTI e Guido ZAPPA, rispettivamente ordinari di Meccanica razionale e di Geometria analitica nell' Università di Napoli, e soci corrispondenti nella stessa sezione i proff. Attilio COLACEVICH, direttore dell' Osservatorio astronomico di Capodimonte, e Gianfranco CIMMINO, professore di Analisi matematica nell' Università di Bologna. I nuovi colleghi, che erano già quasi tutti legati a questa Accademia per averne fatto parte in altra categoria o per avere contributo, con i propri lavori, all' incremento delle nostre pubblicazioni, e che per entrambe le ragioni ci sono particolarmente cari, accresceranno senza dubbio lustro e decoro al Sodalizio e ci coadiuveranno efficacemente nel conservarne alto il prestigio e ininterrotta la plurisecolare tradizione scientifica.

Mentre salutiamo con gioia queste novelle energie, mandiamo un reverente saluto alla memoria di un caro collega scomparso, che appartenne per più di 16 anni alla categoria dei nostri soci stranieri nella sezione di Scienze naturali : Hidezò TANAKADATE SIMOTOMAI. Giapponese di nascita, ma grande amico dell' Italia, che conosceva ed amava per avervi dimorato parecchi anni compiendo studi di perfezionamento nei campi della geomorfologia, della sismologia e della vulcanologia, che aveva già attivamente coltivati sia in Giappone che in Cina, egli diede agli Atti e al Rendiconto numerosi contributi scientifici, collaborando a Napoli con il socio DE LORENZO nello studio della regione flegrea, oltre che con i proff. MONTICELLI e CAROBBI, così come aveva collaborato a Roma con l' ing. SABATINI nello studio della conca di Bolsena.

Radiato, per la sua nazionalità, dal Governo Militare Alleato, nel 1944, SIMOTOMAI sarebbe senza alcun dubbio tornato ora a far parte, mediante libera elezione, dell' Accademia di Napoli, a cui si sentì sempre spiritualmente legato, se la morte non lo avesse nel frattempo ghermito. Ma nel lontano Giappone, dove continuò in questi ultimi anni ad esplicare pregevole attività di insegnante e di ricercatore, Egli ignorò sempre questa espulsione. E fu un bene, giacchè i suoi consoci, che lo considerarono sempre leale amico dell' Italia e degl' Italiani e oggi ne rimpiangono la perdita, sentono meno l' amarezza della mancata riparazione di un torto, che essi avevano già in cuor loro nettamente ripudiato.

Instabilità ed inentità del mondo

Nota del socio ordinario **Giuseppe De Lorenzo**

(Adunanza del dì 5 gennaio 1952)

Sunto. - Questa Nota vuole essere il seguito delle due precedenti: *Le teorie di Einstein*, pubblicata nel Rendiconto di questa Accademia del 1950, e le *Concezioni del mondo antiche e moderne*, nel medesimo Rendiconto del 1951; per precisare ancora meglio le coincidenze tra le antiche intuizioni del mondo, indiane e mediterranee, con le moderne europee.

In due mie precedenti Note: *Le teorie di Einstein*, pubblicata nel Rendiconto di questa Accademia del 1950, e le *Concezioni antiche e moderne del mondo*, nel medesimo Rendiconto del 1951, ho cercato di mostrare le analogie e le coincidenze tra le antiche intuizioni del mondo, orientali ed occidentali, e le moderne nostre cognizioni scientifiche. Ora voglio ancor meglio precisare, in tale senso, alcune di quelle antiche concezioni indiane, fisiche e metafisiche, specialmente buddhistiche. Con ciò chiedo venia ai colleghi ed agli eventuali lettori, se, vecchio quale ormai sono, ripeto sempre il medesimo tema, con la monotonia, con la quale la cicala ricanta il suo perpetuo canto: senza, però, potermi gloriare dell' epiteto di « armonioso », che Esiodo dava alla cicala, e senza potermi lusingare del paragone, istituito da Omero nel canto terzo dell' *Iliade*, tra il canto delle cicale ed il cicaleccio dei garruli vecchi, « simili alle cicale, che assise sull' albero effondono per la selva il loro canto liliale »:

τεττίγεσσιν ἐοίκοτες, οἵτε καθ ὕλην
δενδρέῳ ἐφεζόμενοι ὄπα λειριόεσσαν ἱεῖσιν.

Sia come si sia, eccomi qui dunque di nuovo a ripetere l' antico tema, per meglio precisare alcune coincidenze tra le antiche intuizioni del mondo, indiane e mediterranee, con le nostre moderne concezioni europee.

Da tempo è ormai noto, che durante tutto il millennio prima di Cristo, ed in più che mezzo millennio dopo di Lui, nell' India e nel mondo greco-latino del Mediterraneo s' è svolta una portentosa fioritura d' arte e di pensiero; che non ha più avuto pari sulla terra e che solo dopo quasi un altro millennio, dopo il Rinascimento italiano, ha suscitato una simile fioritura, nella moderna cultura europea ed occidentale. Nell' India l' antichissima poesia vedica e le concezioni religiose e filosofiche brâhmaniche, bud-

dhistiche, giainistiche e hinduistiche, fino alle ultime vedântiche, trovano sul Mediterraneo riscontro nella poesia esiodea ed omerica, nell' orfismo e nelle filosofie presocratiche, platoniche, aristoteliche, ciniche, stoiche, epicuree e neoplatoniche, fino alle manifestazioni latine di LUCREZIO, SENECA, MARCAURELIO e sant' AGOSTINO. Le coincidenze tra le due correnti parallele di pensieri son tali e tante, che già dall' antichità, prima ancora che la campagna in India del grande ALESSANDRO mettesse in contatto i filosofi greci con i sapienti indiani, si era pensato ad un influsso del pensiero indiano sul greco, specialmente su quello dei presocratici, e sopratutto di PITAGORA e di EMPEDOCLE: influsso affermato poi anche da LUCIANO, APULEIO, san GIROLAMO e sant' AGOSTINO, specialmente in riguardo ai neoplatonici PLOTINO e PORFIRIO; e ripetuto da studiosi moderni di filosofia indiana, come il COLEBROOKE, e di filosofia greca, quali lo ZELLER ed il GOMPERZ. Ma, anche senza ricorrere all' ipotesi dell' influsso del pensiero indiano sul greco, e ritenendo, che un analogo ordine di pensieri abbia potuto indipendentemente e contemporaneamente svolgersi sull' Oceano Indiano e sul Mediterraneo, non si può non rimanere colpiti dal parallelismo e dalle coincidenze di tali pensieri nelle due cognate civiltà e culture indoeuropee. Di tali coincidenze si possono ricavare molte gemme dalla miniera di note, apposte da Carl Eugen NEUMANN alle sue grandi traduzioni dei testi pâli del buddhismo, specialmente di quelle, aggiunte al terzo volume della sua traduzione del *Dîghanikâyo,* München, Piper, 1928. Ed una recente, magistrale esposizione se ne pnò trovare nell' opera *Die Philosophie der Inder*, Stuttgart, 1949, dell' illustre indologo Helmuth von GLASENAPP, dell' Università, prima di Königsberg ed ora di Tübingen. In questo campo, però, essi erano stati già preceduti da Victor COUSIN (seguìto, poi, a sua volta, dal GOBINEAU), il quale nel suo *Cours de l' histoire de la philosophie,* tenuto nel 1829, proclamava: « L' Orient c' est à dire pour moi l' Inde... L' Orient est le berceau de la civilisation et de la philosophie; l' histoire remonte jusque là et pas plus haut. Nous venons des Romains, le Romains des Grecs, les Grecs de l' Orient... L' Orient est donc pour nous le point de départ de la philosophie. » Naturalmente, allo stato attuale delle nostre conoscenze non si può oggi sottoscrivere in tutto e per tutto l' entusiastico ditirambo del COUSIN.

Ferme, dunque, restando le innegabili coincidenze tra l' antico pensiero greco e l' indiano, sia che l' uno sia stato influenzato o no dall' altro, e prescindendo dagli scettici, dai materialisti e dai sofisti, abbondanti nell' uno e nell' altro campo; che ponevano il mondo a caso e non ritenevano in esso alcun ordine naturale o morale: resta da osservare, scrive giustamente il GLASENAPP, che esiste una differeuza fondamentale tra l' intuizione indiana e le concezioni occidentali. Queste hanno distinto sempre e distinguono la legge morale dalla legge fisica del mondo. Quella, invece, si è sempre fondata sopra una base unitaria eticometafisica. Tutti i pensatori

indiani hanno creduto e credono, che l' ordine naturale del mondo è allo stesso tempo l' ordine morale dello stesso mondo e che quindi ogni fatto od azione (*karma* in sanscrito, *kamma* in *pâli*), sia che si esprima in opere, in parole od in pensieri, produce una reazione rispondente alla sua qualità. Come il seme, in circostanze propizie, matura, per vie invisibili, a frutto: così ogni azione, oltre la sua immediata apparenza, matura, per vie egualmente invisibili, in ineluttabili conseguenze di questa o di altra esistenza. L' intuizione filosofica indiana assume quindi una causalità morale, intimamente connessa con la causalità naturale del mondo ed agente di là dal tempo e dallo spazio. La forza transcendente del *karma*, od azione, fa sì, che ogni individuo agente risponde delle sue proprie azioni e non dipende da quelle di altri; ed inoltre quella forza non fa differenza tra le diverse manifestazioni organiche ed inorganiche, spirituali e materiali, umane, animali o divine del mondo; ed assume un' essenziale eguaglianza di tutti gli esseri viventi, una molteplicità di mondi, legati alla stessa legge naturale e morale dell' uomo, ed un processo eterno o giro *samsâro*) dell' universo, senza principio nè fine.

Ma tutto ciò suona stranamente simile a quel che Kant ha scritto, nella sua *Critica della forza teleologica del giudizio*, II, 2, § 83, sulla sublimità dello spirlto umano rispetto all' immensità dell' universo, e che Schopennauer ha ribadito nella sua *Epifilosofia*, scrivendo: « Fin dai tempi più antichi si è sempre ritenuto l' uomo come il microcosmo. Io ho invertito il principio e ho mostrato il mondo come macrantropo ... perchè evidentemente è più esatto insegnare a comprendere il mondo dall' uomo, anzi che l' uomo dal mondo: perchè da quel che ci è dato immediatamente, ossia dall' autoconscienza, si può spiegare quel che è dato mediatamente dalla intuizione, e non viceversa. » Ma, ciò è appunto quel che sei secoli prima di Cristo aveva proclamato il Buddha Sakyamuni nella sua famosa sentenza: « Io vi dico, che in questo corpo alto otto spanne, dotato di percezione e di conscienza, è contenuto il mondo, è contenuta l'origine del mondo, la fine del mondo e la via, che porta alla fine del mondo. » E questo è anche meglio e più profondamente detto del macrantropo di Schopenhauer.

Se ora ritorniamo verso quegli antichi pensatori greci ed indiani, troviamo, che essi svolsero parallelamente e contemporaneamente due ordini diversi di pensieri: gli uni diretti prevalentemente verso il lato transcendente, e gli altri verso il lato immanente del mondo: e gli uni e gli altri fiorirono tra il sesto ed il quinto secolo avanti Cristo. Rappresentanti principali del primo ordine furono, nell' Italia meridionale, gli eleatici, con a capo Parmenide; il quale aveva già distinto il νούμενον intelligibile dal φαινόμενον sensibile e s' era appigliato al primo quale essenza dell' universo, chiamandolo l'Ente, τὸ ὄν, l'Uno e il Tutto, ἓν καὶ πᾶν, il nunc stans, integrum, aequale, immotum. A tale concezione corrispondeva una simile e contemporanea sulle rive dell' Indo e del Gange, rappresentata dall' intuizione

dell' *âtman*, o anima del mondo, della filosofia laica upanisciadica, e dalla concezione del *brahma*, o Ente e spirito assoluto dell' universo, che fa capo a tutti i sistemi sacerdotali, brâhmanici, dell' India.

Dopo due millenni tale ordine transcendentale di pensieri è rigermogliato in Europa nel panteismo di Giordano BRUNO e di SPINOZA. Con questa differenza: che in SPINOZA il panteismo si irrigidisce in un quasi monoteismo, di stampo semitico; mentre in BRUNO si plasma, si vivifica e si moltiplica in un quasi politeismo, di origine indoeuropea. Ne è prova il fatto, che il BRUNO tra il 1582 ed il 1583 pubblicò quasi contemporaneamente, a Londra, il dialogo metafisico *De la causa, principio et uno,* in cui, com' è detto nell' epistola proemiale, canta la

Causa, principio et uno sempiterno,
Onde l' esser, la vita, il mondo pende:
E a lungo, a largo, e profondo si stende
Quanto si dic' in ciel, terra et inferno;

ed il dialogo fisico *De l' infinito, universo e mondi,* nel quale afferma, che nel mondo « nulla sostanzialmente si sminuisce, ma tutto, per infinito spacio discorrendo, cangia il volto: perchè ne è noto un mondo, in cui sempre cosa succede a cosa. » E similmente, sei o sette anni dopo, pubblicò quasi contemporaneamente, in Germania, i poemi latini *De monade, De minimo* e *De immenso et innumerabilibus;* in cui espose parallelamente la concezione noumenica di PARMENIDE, l' atomistica di DEMOCRITO, di EPICURO e di LUCREZIO e la visione fenomenica di ERACLITO.

Questo duplicismo, o quasi eccletticismo, del BRUNO, trova riscontro nel triplicismo o molteplicismo della religione popolare indiana, cioè del hinduismo. Gli hindu, tanto quelli dominanti, di origine aryana, che i dominati, di origine dravidica, non si appagarono nè si appagano del *Brahma* astratto, spirito assoluto del mondo, o del *Brahmâ* sacerdotale, creatore del mondo stesso; ma, spinti dal loro spirito fantasioso, plasmatore ed immaginativo, gli posero accanto, in *Visnu* e nelle sue dieci discese od incarnazioni, *avatâra,* un potere attivo, transformatore del mondo; ed un altro, ancora più attivo, in *Siva,* distruttore e, al tempo stesso, rigeneratore del mondo: come dimostrano i suoi simboli: la corona di cranii e l' organo fallico della generazione, il *lingam.* Così crearono la *Trimûrti* hindu, a cui aggiungendo le rispettive paredre della *sakti,* o vitalità femminile, finirono col creare l' immenso pantheon della mitologia indiana; il quale, espresso in pietra, nell' architettura e nella scultura, faceva inorridire il senso classico di GOETHE, ma ora è stato giustamente compreso e valutato, nel suo valore artistico, da illustri critici d' arte, quali E. B. HAVELL e Laurence BINYON. Il nostro Giuseppe TUCCI, nella sua introduzione all' album di fotografie MADANJEET, recentemente pubblicato dal PIZZI a Milano, col titolo

La scultura indiana nel bronzo e nella pietra, ne dà una così eloquente interpretazione, che non posso fare a meno, di qui riportarla, perchè essa concorre a spiegare anche lo spirito filosofico indiano. « L'album, che la perizia e il gusto di MADANJEET SINGH hanno messo insieme, riproduce alcuni esempi di scultura di varia epoca e provenienza e documenta, per mezzo di monumenti assai espressivi, gli aspetti essenziali della plastica indiana. Per quanto pochi, essi bastano a dare un'idea dei caratteri fondamentali di un'arte, che fa la sua grande apparizione con la celebre danzatrice scoperta a Mohenjo-Daro [di almeno duemila anni prima di CRISTO], agile nella sua composta discrezione, e poi esulta nelle transenne di Sanchi e Bharhut [del terzo secolo avanti CRISTO], con finezza e flessuosità di forme, dispiegate in figure, sia singole che composte in gruppo, senza eccessive preoccupazioni di piani, ma colte nel loro naturale e spontaneo accalcarsi in una libertà, che imita la irrazionale e fervida ebrezza della giungla. Poi su questa folla di dei e di semidei si stacca la figura dell'asceta jainico e buddhistico, il quale impersona l'ideale dell'uomo perfetto, dell'uomo cioè che, traverso le esperienze, domina la vita e la supera, conquistando l'altro piano, il piano nirvanico, il piano dell'essere opposto ai mutevoli aspetti del divenire e della *mâyâ* [illusione]. E sono i due estremi fra cui oscilla la plastica indiana: da una parte il mondo umano riprodotto nella sua barocca esultanza e coesistenza di opposti, dall'altra il mondo celestiale e divino. Da una parte l'uomo transumanato, simbolo di una spersonificata verità; dall'altro la disordinata naturalezza della vita rigogliosa di alberi, bestie, uomini, dei, semidei, etc. All'infuori dl quelle raffigurazioni, che rappresentano l'uomo perfetto, al di là del bene e del male, una vitalità irrequieta, un moto elementare agita le imagini degli dei, i quali sono riprodotti genericamente e nell'atto stesso del loro slancio creativo, o nelle lotte tremende, che essi sostengono per debellare le forze avverse e che hanno insieme ispirato le narrazioni epiche e puraniche o le mitografie istoriate sui templi ad essi dedicati. Ne nasce un ritmo di danza, che domina coteste raffigurazioni, cariche di significazioni sottili, così sottili, che la rappresentazione plastica può dirsi una simbologia in atto, nella quale i gesti degli dei e gli strumenti, che essi impugnano, e le maschere della faccia sono indicative di profonde implicazioni teologiche e misteriofisiche. In certe statue questo motivo è così evidente, che esse possono dirsi soprattutto una rappresentazione plastica del moto; ci viene subito in mente la immagine di Sciva danzante, simbolo visivo del ritmo della danza universa, che suscita mondi dal sonno degli archetipi e li annienta in universale conflagrazione. E non v'è nulla di strano, perchè gli dei indiani sono quasi tutti inseriti nelle vicende della creazione, non essi creatori: proiezione attiva di una assoluta, immota coscienza che li trascende, da cui emanano ed in cui sono riassorbiti, con alternanza certa, quando l'opera loro segnata dall'implacabile legge dell'evoluzione ed involuzione cosmica sia terminata:

forme dunque traverso le quali il segreto meccanismo dell' universo si rivela all' uomo perchè, su esso meditando, egli abbia a sua disposizione un facile strumento per superare la contradditorietà del divenire fenomenico o riacquistare la serenità dell'anima, perennemente distaccata, o dissolversi in spersonificata identità in quella medesima coscienza fuori della quale non è verità. Ma allora l' agitazione si placa e ogni esaltazione o moto si spegne nella fissità dell' estasi yoga, che riposa nella serena compostezza del BUDDHA di Sarnath, intento ad esplorare con gli occhi socchiusi le profondità dell' anima. » Questa eloquente interpretazione di Giuseppe TUCCI dell' arte indiana ci aiuta anche a comprendere le manifestazioni del pensiero filosofico e religioso dell' India. *Sic res accendent lumina rebus.*

Quest' arte indiana, dunque, rappresenta le forme ed i fenomeni del mondo immanente, conoscibile, espresse dall' inconoscibile mondo transcendente. Allo stesso modo sul Mediterraneo un altro grandissimo pensatore, ERACLITO, nella sua intuizione del mondo ne vide la parte fenomenica e, in contrasto dell' ente *nunc stans,* eguale, intatto ed immoto di PARMENIDE, proclamò, che tutto scorre, πάντα ρεῖ, o, come riferisce PLATONE nel *Cratilo,* tutto scorre e nulla permane, e nessuno s' è mai bagnato due volte nello stesso fiume: πάντα χωρεῖ, καὶ οὐδὲν μένει, etc. E può darsi, che questo pensiero di ERACLITO abbia suggerito ad ORAZIO l' immagine, da lui istituita a scopo morale nella II epistola del primo libro, del villano, che, per passare a piede asciutto all' altra sponda, aspetta, che il fiume defluisca, mentre quello scorre e scorrerà, rivolvendosi di continuo:

> Rusticus expectat, dum defluat amnis: at ille
> Labitur et labetur, in omne volubilis aevum.

Ma ERACLITO vedeva ancora altro, nel mondo fenomenico, accessibile alla esperienza. Vedeva, che la vita è vita di nome, ma in opera è morte: Τῳ οὐν βιῳ ὄνομα μεν βίος, ἔργον τε θάνατος; ed aggiungeva, che tutti gli esseri sono immortali mortali, mortali immortali, viventi della morte degli altri e della vita degli altri morenti: ἀθάνατοι θνητοί, θνητοί ἀθάνατοι, ζῶντες τον ἐκείνων θάνατον, τὸν δε ἐκείνων βίον τεθνεῶτες. Il che suona stranamente simile, nella sua applicazione agli uomini, al pensiero lasciatoci da LEONARDO da Vinci: « E il corpo di questi si farà sepultura e transito di tutti i già, da lor morti, corpi animati. » Ma i pensieri di ERACLITO, sull' impermanenza, l' inessenzialità ed il fluire della vita e della morte nel mondo, trovano esatta corrispondenza, come qui appresso si vedrà, negli analoghi pensieri, quasi contemporaneamente espressi nell' India dal BUDDHA SAKIAMUNI.

Questo doppio modo di concepire il mondo e la vita, degli antichi pensatori greci ed indiani, trova un riscontro nella duplice corrente della filosofia moderna postrinascimentale: quella idealistica, iniziata da DESCARTES

(che però nel suo *cogito ergo sum* era stato già preceduto dal *cogitare et intelligere idem esse* di PARMENIDE) e proseguita da MALEBRANCHE, BERKELEY e HUME; e l'altra realistica ed empirica di BACONE, GALILEO, LOCKE, etc., continuatasi nel positivismo e psicologismo scientifico attuale. L'una e l'altra corrente sfociarono nella *Critica della ragion pura* di KANT, che definì i limiti della ragione umana e distinse definitivamente l'idealismo trascendentale dal realismo empirico.

Al realismo empirico ed alla conseguente cognizione della transitorietà del mondo fenomenico si attacca anche MONTAIGNE, che nel XII capitolo del secondo libro dei suoi *Essais* se ne appella appunto ad ERACLITO ed ai versi 828-831 del quinto libro *De rerum natura* di LUCREZIO:

> Mutat enim mundi naturam totius aetas,
> ex alioque alius status excipere omnia debet,
> nec manet ulla sui similis res: omnia migrant,
> omnia commutat natura et vertere cogit.

Meglio di tutti aveva espresso tale concezione l'imperatore MARCO AURELIO nel 28 del IX libro dei pensieri *In sè stesso*: « In breve la terra ci coprirà tutti quanti; poi anche la terra si trasformerà; e poi quello, che risulta da tale trasformazione, si trasformerà ancor esso all'infinito; e poi di nuovo quest'altro all'infinito. Chi invero considera questo veloce e continuo fluire di mutamenti e di alterazioni, disprezzerà ogni cosa mortale. » Il che è perfettamente conforme alla dottrina buddhistica.

In tutto questo non bisogna dimenticare quel che lo stesso ERACLITO avvertiva, che, cioè, le opinioni degli uomini son come i giochi dei fanciulli: Παίδων ἀθύρματα τα ἀνθρώπινα δοξάσματα; riferendosi, certo, al paragone omerico del canto XV dell'*Iliade*, del fanciullo, che sulla spiaggia del mare costruisce suoi giochi con l'arena e, appena li ha compiuti, si affretta a distruggerli con le mani e con i piedi. Paragone, sia qui detto per incidente, che si ritrova quasi con le medesime parole nell'insegnamento, che GOTAMO BUDDHO dà al discepolo *Râdho*: « Così come quasi fanciulli o fanciulle si divertono a costruire casette di sabbia e di terra e, pieni di ardore e di brama, di volontà e di passione, vi lavorano febbrilmente e le curano e le guardano; ma, appena gliene è loro passata la voglia, si affrettano con le mani e con i piedi a disfarle, distruggerle e calpestarle: or così anche appunto etc. » Tali, dunque, sono le opinioni degli uomini, anch'esse mutevoli ed instabili come tutte le cose del mondo. E lo stesso BUDDHA in accordo con KANT e SCHOPENHAUER, proclamava, che è da stolti ritenere che solo la propria opinione sia vera e quella degli altri insensata. Perchè non solo l'inconoscibile mondo noumenico, ma anche il sensibile fenomenico può essere per noi un'illusione.

Infatti vediamo, che proprio nell'interpretazione dell'accessibile mondo

fenomenico le opinioni, siano degli antichi che dei moderni, sono state e sono assai mutevoli: appena costruite e già distrutte, come i giochi del bimbi. Quegli antichi pensatori greci ed indiani non interpretavano ed esponevano il mondo con i nostri moderni sistemi e termini scientifici. Essi ignoravano, come ignorarono tutti dopo di loro, fino a LAVOISIER, gli elementi sostanziali della chimica moderna, quali l' ossigeno, l' idrogeno, l' elio, etc.; e tanto più ignoravano gli agenti insostanziali della moderna fisica, quali gli elettroni, i neutroni, i mesoni, etc. Essi scrutavano il mondo con la pura mente, aiutata solo dai sensi. Ed in ciò precedevano, senza saperlo, quel che dopo millenni riteneva ancora GOETHE, che cioè il microscopio ed il telescopio e tutti gli strumenti scientifici non servono che ad imbrogliare la pura intelligenza umana: *Microskop und Fernrohr verwirren eigentlich den reinen Menschenverstand.* Essi, quindi, interpretarono la costituzione dell' universo, sia del macrocosmo che del microcosmo, secondo quel che ad essi era direttamente accessibile delle forme e dei fenomeni, raggruppandolo nei cosidetti quattro elementi fondamentali. Tutto quello che in noi e fuori di noi è di natura vaporosa, gassosa, aeriforme, essi lo simboleggiarono nell' elemento *aria*; il fluido e liquido nella specie dell' elemento *acqua*; il solido e plastico e duro nell' elemento *terra*; ed il caloroso e luminoso nell' elemento *fuoco*. A ciò bisogna aggiungere le teorie atomistiche di DEMOCRITO e di EPICURO. Ma, anche sulla relativa importanza dei quattro elementi, per la genesi e la formazione del mondo, le opinioni erano discordi. TALETE, l' antico sapiente, vedeva nell' acqua l' origine di tutte le cose: come ci riferisce anche CICERONE in *De natura deorum*: Tales aquam dixit rerum initium, deum autem mentem, quae ex aqua cuncta fingerat. ANASSIMENE, invece, era per l' aria; XENOFANE per la terra; PARMENIDE per la terra ed il fuoco; ERACLITO per il fuoco; e così via. Questi quattro elementi fondamentali hanno costituito per millenni il tema, non solo delle disquisizioni filosofiche, ma anche delle espressioni poetiche, sacre e profane. Basti ricordare le sublimi invocazioni del nostro caro Signore santo FRANCISCO per « frate vento et per aere, nubilo et sereno; per sora aqua, la quale è molto utile et humile et pretiosa et casta; per frate foco, che è bello e iocundo e robustoso e forte; per nostra matre terra, la quale ne sustenta e governa, e produce diversi frutti, con coloriti fiori et herba. » E tre secoli prima di san FRANCESCO il grande poeta indiano BHARTRIHARI nella valle del Gange similmente cantava: « O madre terra, padre cielo, amico fuoco, sora acqua, frate vento, supplice ed a mani giunte vi prego che, mondato d' ogni stoltezza e purgato d'ogni colpa, io possa tra le lucide fiamme flagranti dissolvermi nel gran tutto. » Tali elementi, oggetti di così alte aspirazioni per BHARTRIHARI e san FRANCESCO, diventano mezzi di feroci invettive per CECCO ANGIOLIERI, il punzecchiatore di DANTE: « S' i fossi foco arderei lo mondo, s' i fossi vento, 'l tempesterei; s' i fossi acqua, io l' annegherei; s' i fossi Dio, mandereil'n

profondo. » E GOETHE, il grande sintetizzatore moderno della scienza con la poesia; il quale nei suoi studi geologici voleva conciliare il nettunismo col plutonismo, nella notte classica di Valpurga, nella seconda parte del *Faust,* cerca di conciliare TALETE con ERACLITO, facendo intonare dalle *Sirene,* sul mare fosforescente di vita novella, il canto ad *Eros,* genitore di tutto: « Salve al mare! Salve all' onda! Che il divin fuoco circonda! Salve all' acqua! Salve al fuoco!

Heil dem Meere! Heil den Wogen!
Von dem heiligen Feuer umzogen!
Heil dem Wasser! Heil dem Feuer! »

Ma ERACLITO non si può facilmente conciliare con TALETE, non solo perchè il fuoco non si concilia con l' acqua, ma anche perchè ERACLITO, al contrario di TALETE, non fa intervenire alcuna potenza divina nella formazione del mondo. Il mondo, egli dice, lo stesso di tutti, non lo creò alcuno degli dei nè degli uomini, ma fu sempre ed è e sarà, fuoco inestinguibile, ora divampante, ora covante: Κόσμον, τὸν αὐτὸν ἁπάντων, οὔτε τις θεῶν οὔτε ἀνθρώπων ἐποίησεν, ἀλλ᾽ἥν αἰεὶ καὶ ἔστιν καὶ ἔσται, πῦρ αιείζωον, ἁπτόμενον μέτρα καὶ ἀποσβεννύμενον μέτρα.

Se, dunque, ERACLITO non si concilia con TALETE, egli va, invece, perfettamente d' accordo con le contemporanee filosofie ateistiche indiane: quali il sistema sânkya di KAPILA, il giainismo di MAHAVIRA ed il buddhismo di GOTAMO. Ed ancor più d' accordo con questi va il pensiero dell' agrigentino EMPEDOCLE; il quale assumeva, per la formazione del mondo, tutt' e quattro gli elementi, il fuoco, l' aria, l' acqua e la terra, messi in moto da due forze dominanti, l'amore e l'odio, ossia attrazione e repulsione: Εμπεδοκλῆς 'Ακραγάντινος τέτταρα μεν λέγει στοιχεῖα, πῦρ αἔρα ὓδωρ γῆν, δύο δε ἀρχικὰς δυνάμεις, φιλία τε καὶ νεῖκος.

Anche gli antichi pensatori indiani ammettono, in parità di condizioni, i quattro elementi principali, l' aria, l' acqua, la terra ed il fuoco, quali costituenti dell' universo, e vi aggiungono, come quinto. l' *âkâsa* o lo spazio: quello che la nostra fisica chiama etere cosmico. La forza, che agita tali elementi, si manifesta anche con amore ed odio, attrazione e repulsione, ma è fondamentalmente, per i buddhisti, la *tanhâ,* la sete, la sete di vivere, nelle sue tre manifestazioni: della sete dell' amore o del sesso, *kâmatanhâ*; della sete dell' essere, *bhavatanhâ*; e della sete del superessere, *vibhavatanhâ.* La *tanhâ* corrisponde esattamente al *Wille* inconsapevole di SCHOPENHAUER; la *vibhavatanhâ,* o sete del superessere, potrebbe corrispondere al *Wille zur Macht,* la volontà di potenza, del superuomo di NIETZSCHE. La *tanhâ* potrebbe letteralmente definirsi con i noti versi di DANTE: « la sete natural, che mai non sazia » (*Purg.* 21), e « la concreata e perpetua sete » (*Par.* 2), se DANTE non intendesse con essi ben altre cose. Invece

essa corrisponde perfettamente al famoso verso 1084 del terzo canto *De rerum natura* di LUCREZIO: « et sitis aequa tenet vitai semper hiantis » ; ed ancor più, nello spirito e nella forma, a quel che SHAKESPEARE dice nella seconda scena del primo atto di *Measure for Measure*: « Le nostre nature, come ratti che divorano il loro proprio veleno, ardono di una mala sete, e quando beviamo, moriamo :

Our natures do pursue,
Like rats that ravin down their proper bane,
A thirsty evil, and when we drink we die. »

E' quella, che, in altra circostanza, SHAKESPEARE chiama febbre spasmodica di vita, quando Macbeth dice, che Duncan è nella sua fossa e, dopo la febbre spasmodica della vita, dorme bene: Duncan is in his grave; after life' s fitful fever he sleeps well. Ma questo sonno della morte è solo la fine della vita individuale : quella, che lo stesso Macbeth chiama *brief candle,* breve candela della vita; la vita personale, che anche per SHAKESPEARE, come già per PINDARO, che l'aveva chiamata sogno di ombra σκιᾶς ὄναρ ἄνθρωπος, è solo un'ombra ambulante: *Life' s but a walking shadow.* Ma SHAKESPEARE stesso presente, che la morte individuale è solo un fenomeno apparente e transitorio della vita universale, quando fa dire ad Amleto: « Morire dormire: dormire! fose sognare! ahi, qui è l' impaccio: perchè in quel sonno di morte quali sogni possano venire, quando abbiamo rimosso questo groviglio mortale (*this mortal coil*), ci trattiene . . . altrimenti, morire-dormire-non più; e con un sonno dire, che abbiamo posto fine all' angoscia mentale ed ai mille urti naturali, di cui la carne è erede, sarebbe una consumazione da essere devotamente desiderata. » Il che suona straordinariamente simile al *nibbāna* o *nirvāna* dei buddhisti: cioè all' estinzione totale, non della fugace vita individuale, ma della *tanhâ,* o sete di vita universale. Inoltre il groviglio mortale, *mortal coil,* della vita individuale, che è ripetuto dalla Cleopatra dello stesso SHAKESPEARE, la quale lo chiama questo intricato nodo di vita, *this knot intrinsicate of life,* corrispondente esattamente al quintuplo fascio, o *pancakkhandâ,* in cui è congregata, secondo i buddhisti, la instabile ed inessenziale persona animale ed umana. Infine, questo lampo vivissimo della intuizione di SHAKESPEARE, della vita personale ed universale, tanto simile alla conceziane buddhistica, si rivela nelle parole, che nel *Julius Caesar* pronunzia Cassio durante la battaglia a Filippi: « Il tempo ha fatto il suo giro, e dove io cominciai, là finirò; la mia vita ha fatto il giro del suo circolo. » Il che è poi ancor meglio spiegato nelle famose parole, che SHAKESPEARE fa pronunziare al suo rappresentante Prospero nella *Tempesta*: « Noi siamo tale materia come ne son fatti i sogni; e la nostra piccola vita è girata con un sonno :

We are such stuff
As dreams are made on; and our little life
Is rounded with a sleep. »

Il che significa, che la nostra piccola vita personale si schiude da un sonno prenatale e si chiude. dopo il suo giro, o *round*, con un sonno postmortale; del quale, come del sonno antenatale, noi ignoriamo i sogni, paventati da Amleto. E questo era stato già pur detto da LUCREZIO nel terzo canto di *De rerum natura*: « Considera ora quale nulla è per noi la passata antichità del tempo eterno, la quale ha preceduto la nostra nascita. Questo dunque è lo specchio, che la natura ci presenta, del tempo futuro dopo la nostra morte:

> Respice item quam nil ad nos anteacta vetustas
> temporis aeterni fuerit, quam nascimur ante.
> Hoc igitur speculum nobis natura futuri
> temporis exponit post mortem deniqne nostram.

Ma le parole adoperate da SHAKESPEARE, ancor più di quelle di LUCREZIO, *round, rounded,* corrispondono erattamente alla parola indiana, *samsâro,* indicante il giro, senza principio nè fine, dell' universo e della vita universale; in cui le transitorie vite particolari non sono che le brevi candele, le fuggevoli fiammelle, che si trasmettono l' un l' altra la lampa della vita: vitai lampada tradunt.

Il modo di trasmissione della vita è esposto, per via di paragoni, nell' antico testo pâli indiano del *Milindapanha*; nel quale sono raccolte le conversazioni e le discussioni tra il monaco mendicante buddhista NAGASENO ed il re MILINDA; o MENANDROS: uno dei successori di ALESSANDRO Magno, il quale regnò dal 125 al 95 avanti CRISTO nell' India nord-ovest, e propriamente in quella parte attualmente occupata dal Pakistan. Il re MENANDRO, intelligente e curioso come tutti gli antichi greci, volle essere illuminato sui principii della dottrina buddhistica da frate NAGASENO; il quale soddisfece pienamente la curiosità del re. Il testo pâli delle questioni di Milinda, o *Milindapanha,* fu pubblicato nel 1880 dal TRENCKNER e poi subito dopo tradotto in inglese da T. W. RHYS DAVIDS. Dalla traduzione inglese è stato tradotto in italiano dal conte Guido CAGNOLA e pubblicato nel 1923 a Milano dalla Casa editrice Isis. Ecco un esempio di come è esposta la teoria della trasmissione della vita.

« Il re disse: Colui che rinasce, Nâgaseno, rimane lo stesso o diventa un altro? — Nè lo stesso, nè un altro. — Dammi un esempio. — Che cosa ne pensi, o re: tu fosti una volta un tenero fantolino, giacente supino: era questo lo stesso di te, che sei ora adulto? — No: l' infante era uno ed io un altro. — Se tu non sei quel bambino, allora tu non hai avuto madre, nè padre, nè maestro. E come, gran re: la madre dell' embrione nel primo mese del feto è diversa da quella del secondo, terzo o quarto mese e così via? E la madre del poppante è diversa da quella dell' uomo adulto? Ed il fanciullo, che va a scuola, è diverso dall' uomo, che ha compiuto la sua istruzione? E colui, che ha commesso un delitto, è diverso da quello, che

perciò è punito? — Certamente no: ma che vuoi dire con ciò, o signore? — Vorrei dire, che sono la medesima persona, di cui i fattori sono raccolti e trasmessi in un corpo successivo. — Dammi un esempio. — Supponi, gran re, che un uomo accenda una lampada: arderebbe essa tutta la notte? — Sì, potrebbe fare così. — Ora, è la medesima fiamma, che arde nella prima e nella seconda parte della notte? — No! — Allora, una è la lampada della prima, un' altra quella della seconda, ed un' altra quella della terza parte della notte? — No: la fiamma viene dalla stessa lampada durante tutta la notte. — Appunto così, o re, si mantiene la fiamma della vita, che trapassa dall' una all' altra esistenza: da morte a nascita e da nascita a morte; fino all' ultima coscienza di sè. — Dammene un altro esempio. — E' come il latte; che, appena munto dalla vacca, è liquido, poi si coagula in latte quagliato dolce, poi in latte quagliato acido, poi si trasforma in siero e burro. Ora si può dire che il latte munto è la stessa cosa del latte quagliato, del latte acido e del burro? — Certamente no — però uno deriva dall'altro. — Or così anche appunto, o gran re, un' esistenza deriva dall' altra, e non è la stessa nè un' altra; ed è la stessa ed un' altra. »

Questo è un modo troppo curioso di considerare la cosa: dice Orazio ad Amleto, quando questi gli espone tutte le trasformazioni della vita, dal mondo inorganico all' organico e viceversa: dall' uomo al verme, dal verme all' uomo, dall' uomo alla terra, e così via: *'Twere to consider too curiously, to consider so.* Ma questo è appunto il modo buddhistico di considerare la vita e la morte: che non sono, come ben dice Paul DAHLKE nella sua opera *Buddhismus als Weltanschauuny*, Breslau 1912, se non un avvicendarsi di *dhamma*, o fattori di esistenza, sia in noi, che sulla terra o nell' universo; in cui nulla sorge dal nulla e nulla finisce nel nulla, ma tutto è mutamento di centri di tensione. Considerare una terra, un sole, una stella come identità e corporeità finite è così vano come considerare definite le nostre personalità. Come in noi, così nell' infinito universo e mondi vi sono tensioni, che noi, per l' infinità del tempo e dello spazio aderente alla nostra ragione, consideriamo come identità ed individualità, per la nostra più facile intellezione. Ma esse hanno solo significato sintomatico, non sono che forme, in cui si manifestano determinate energie.

L' energia, che agita il mondo, è la *tanhâ,* la sete di vita, la sete seminante riesistenza, anelante al piacere, qua e là appagantesi; la sete del sesso, la sete dell' essere, la sete del superessere. Tale sete, mossa dall' ignoranza, *avijjâ,* in funzione dell' azione, *karma* o *kamma*, e pel tramite della cosiddetta catena causale od origine dipendente, *paticcasamuppada*, aggrega i *dhamma*, o fattori di esistenza, e li stringe nel groviglio mortale od intricato nodo di vita del quintuplo fascio, *pancakkhanda*: del corpo, della sensazione, della percezione, della concezione e della conscienza; in cui è contenuto il mondo, l' origine del mondo, la fine del mondo e la via che porta alla fine del mondo.

Naturalmente, nella formazione del mondo fenomenico, sia del microcosmo che del macrocosmo, entrano a far parte i quattro elementi fondamentali della sostanza universale: l'aria, l'acqua, la terra ed il fuoco, con lo spazio, od etere, per quinto. Ed il BUDDHA dimostra di continuo ai suoi discepoli, che tali elementi, comuni ad entrambi, sono *anicca*, ossia senza durata, *nicca*, impermanenti, instabili; sono *anattâ*, ossia senza *attâ*, sanscrito *âtman*, ἀτμὸς, αὐτός, senza sè, senza io permanente, senza spirito od anima immortale: quindi caduchi, mutabili, dolorosi, *dukkha*. Tutti i fattori d'esistenza, dunque, tutte le cose sono instabili, inessenziali, dolorose: *sabbe dhammâ aniccî anattî dukkhî*. Tale instabilità ed inentità, che si può facilmente osservare nelle forme e nei fenomeni del mondo esteriore, si riflette nel nostro mondo interiore, che è uno con quello: come poeticamente dice BYRON nel *Childe Harold's Pilgrimage*, III, 75: « Non sono le montagne, le onde ed i cieli una parte di me e dell'anima mia, come io di loro?

> Are not the mountains, waves, and skies, a part
> of me and of my soul, as I of them? »

Ed aggiungeva, lo stesso BYRON, nel suo *Journal*, lasciato al suo amico Thomas MOORE, e da questo poi malauguratamente distrutto: « La materia è eterna, eternamente mutevole ed eternamente riprodotta, per quanto noi possiamo comprendere l'eternità. E perchè non la *mente?* Perchè la mente non dovrebbe agire con e sull'universo, come parti di essa agiscono con e sopra la congregata polvere chiamata umanità? » Ma questa è appunto la dottrina buddhistica, concisamente espressa nel primo verso del *Dhammapada*: « Dalla mente derivano le cose, dalla mente sorgono, dalla mente son fatte: *manopubbangamâ dhammā, manosetthâ, manomayâ.* »

Vediamo ora, come tale insegnamento è più diffusamente esposto da GOTAMO nei suoi discorsi. Nel discorso 95 della XXII parte del terzo volume del *Samyuttakamkâyo*, tradotto da Karl Eugen NEUMANN nella sua *Buddhistische Anthologie*, Leiden, 1892, così egli dimostra l'*anattâ*, l'inentità, la mancanza di un ente duraturo nel mondo esteriore e nell'interiore, mondo cosmologico e mondo psicologico: « Così come quasi, o discepoli, se un uomo osservasse, scrutasse, esaminasse attentamente le bolle di spuma, prodotte dall'acqua del Gange; o le gocce d'acqua di pioggia, sprizzante e spumante sul suolo; od un miraggio illusorio nella calda aria estiva; o cercasse legno duro nel fusto molle d'una pianta di banana; o volesse scoprire una cosa reale nei giochi illusori di un prestigiatore; e non vi trovasse alcun nucleo sostanziale, ma solo vuoto e nulla ed inentità: or così anche appunto, o discepoli, se si osservano, si scrutano e si esaminano attentamente le forme presenti, passate e future, vicine o lontane; le sensazioni, le percezioni, le concezioni e la conscienza: non vi si troverebbe alcun nucleo essenziale, ma solo vuoto e nulla ed inentità. »

Questo, che qui è detto per l'*anattâ,* od inentità, si trova, con altre immagini, tratte anch'esse dalla considerazione dei quattro elementi, espresso per l'*anicca,* od instabilità, nel discorso XXVIII del *Majjhimanikâyo,* intitolato *L'orma dell'elefante,* perchè: « Così come quasi tutto ciò ch'è vivente, semovente, fornito di piedi. si gira nell'orma dell'elefante, perchè l'orma dell'elefante è per la grandezza nota come la più prestante: or così anche appunto tutto ciò, che può essere utile pel proprio bene, si gira nella conoscenza delle quattro nobili verità: del dolore, dell'origine del dolore, della fine del dolore e della via che porta alla fine del dolore: ossia alla origine ed alla fine del mondo. » In esso è detto, che l'aria, l'acqua, la terra ed il fuoco sono interni ed esterni. In tali elementi esterni si osserva una continua mutabilità ed instabilltà: da aria agitata da venti ed uragani ad aria immobile e stagnante; da acqua di fiumi, che straripano ed inondano terre e genti, e di fiumi, che si disseccano; di mari, che sommergono le terre, e di mari che spariscono; di terre e di eccelse catene di montagne, che si consumano e svaniscono; di fuochi, che divampano con immani conflagrazioni o che si spengono. Ora, se di questi elementi esteriori, che sono così enormi, ci si palesa tale instabilità e caducità, che li fa soggetti alle leggi della mutazione, della distruzione e della dissoluzione: come si può immaginare, che sia stabile ed eterno questo nostro piccolo corpo, costituito degli stessi elementi, alto otto spanne, prodotto dalla sete d'esistenza? Si può di esso dire « Io » o « Mio » o « Sono »? Piuttosto « Niente è suo » vale in realtà. Pare, come se Luigi PIRANDELLO conoscesse quest'antico pensiero di BUDDHA, quando in uno dei suoi ultimi drammi, *Lazzaro,* del 1929, lo fece esporre dal suo personaggio Lucio, quasi con le medesime parole: l'errore di ammettere il proprio spirito « eterno, infinito, e presumere che possa esser *mio,* di uno che è nel tempo, labile forma d'un momento, jeri o domani. »

Nelle sue argomentazioni però GOTAMO non perde mai di vista lo scopo del suo insegnamento: che è quello della conoscenza del dolore del mondo e del modo di liberarsene. Quindi egli non si occupa di tutte le concezioni teologiche, cosmologiche, psicologiche, etc., escogitate dagli uomini: non già perchè non le conosca; che anzi nel primo discorso del *Dîghanikâyo* ne enumera e ne discute ben sessantadue, dei diversi sistemi religiosi e filosofici del suo tempo; ma li crede inutili al suo scopo ed una semplice perdita di tempo. In un discorso del volume quinto del *Samyuttakanikâyo* è riferito, che trovandosi egli una volta in una selva ed avendo raccolto per terra una manciata di foglie, disse ai discepoli: « Che credete che siano più: le poche foglie, che ho qui in mano, o tutte le foglie lassù, negli alberi della selva? » Ed avendo i discepoli risposto, che non c'era da far paragoni, egli riprese: « Così anche è molto più quel che ho conosciuto e non vi ho partecipato. E perchè non ve l'ho partecipato? Perchè tutto quello non mena alla cognizione della reallà, al distacco da ogni attaccamento,

al risveglio, all' estinzione. A questo menano solo le quattro nobili o sante verità: del dolore, dell'origine, della fine e della via per la fine del dolore. » E tutte le altre concezioni, di cui gli uomini dicono: « Questa mia è la verità, quelle degli altri sono nonsenso: » quelle sono come le concezioni di un certo numero di ciechi nati; i quali, com' è detto nel libro VI dell' *Udâna*, essendo stati condotti presso un elefante, ed interrogati a che cosa lo trovassero simile: quelli, che ne avevano toccato il capo, dissero che rassomigliava ad una giara; quelli, che ne avevano toccato le zanne, che era simile ad un vomere; quelli della proboscide, ad un aratro; quelli del corpo ad una botte; quelli delle gambe a pilastri, e così via: finchè, non potendo mettersi d' accordo e credendo ciascuno di essere nel vero, vennero a lite, contesa e zuffa sanguinosa.

Così, nel discorso LXXII del *Majjhimanikâyo*, ad un certo pellegrino Vacchagotto, che gli chiedeva, perchè egli non accettasse alcuna delle opinioni, allora correnti, sulla vita e sul mondo, Gotamo rispose: « Che il mondo sia eterno o non eterno, infinito o finito, che la vita ed il corpo siano una cosa sola o cose diverse, e simili tante altre opinioni: questo, o Vaccho, è un vico cieco delle opinioni, un roveto delle opinioni, un bosco delle opinioni, un intreccio delle opinioni, un groviglio delle opinioni, un conflitto delle opinioni: doloroso, penoso, disperato e tormentoso; che non mena al distacco, al rivolgimento, non alla dissoluzione, non al sollievo, non al risveglio, non all' estinzione. Perciò dunque, Vaccho, io non accolgo interamente quelle opinioni. » E nel discorso CXL dello stesso *Majjhimanikâyo* è ancora detto: « Io sono: è un' opinione; io sono questo: è un'opinione; sarò: è un' opinione; non sarò: è un' opinione; e simili tante altre opinioni. Ma l' opinione è una malattia, l' opinione è una piaga, l'opinione è un tumore. Chi ha superato ogni opinione, quegli si può chiamare un santo sapiente ». Non par di sentire un' eco di questi pensieri nelle parole di Amleto, che nulla v' è al mondo di bene e di male, ma solo l' opinione, il pensiero lo rende tale: *for there is nothing either good or bad, but thinking makes it so?* Di tutte tali opinioni il Buddha dunque fa a meno, limitandosi solo a quelle, che servono ad illuminare il suo ammaestramento, a scopo di edificazione morale.

Anche Lucrezio attribuisce al giudizio subiettivo ed alle opinioni degli uomini l' importanza esagerata, che essi danno ad alcuni fenomeni tellurici e cosmici, come i terremoti e le eruzioni vulcaniche; i quali, egli dice nel libro VI, anche se vi si aggiungano tutto il cielo e la terra ed il mare, sono un nulla in confronto della somma totale di tutte le somme:

Cum tamen omnia cum caelo terraque marique
nil sint ad summam summai totius omnem.

Ma Gotamo, nel mettere in paragone i fenomeni cosmici con quelli psicologici, lo fa con tanta profondità e perspicuità, da anticipare di gran

lunga, non solo le conclusioni di HUME, che considerava l'Io od il Sè come un fascio, un aggregato di rappresentazioni, che si seguono l'un l'altra con incomprensibile velocità e sono in un flusso costante di continuo movimento; ma anche quelle, più recenti, di fisici e psicologi positivisti, quali AVENARIUS, OSTWALD ed Ernst MACH. Vediamone qualche esempio.

Cominciamo da un paragone con l'aria, contenuto nel *Samyuttakanikâyo*: « Così come quasi, o discepoli, nell'aria soffiano diversi venti, da oriente e da occidente, da settentrione e da mezzogiorno, venti freschi e venti caldi, venti polverosi e venti netti, venti dolci e venti violenti: or così anche appunto su questo corpo agiscono diverse sensazioni: sensazioni piacevoli e sensazioni dolorose, e sensazioni non piacevoli nè dolorose... » E seguitiamo con un paragone dell'acqua del mare, tratto dallo stesso *Samyuttakanikâyo*: « Il mare, il mare: dice la gente comune. E per essa il mare è una grande massa d'acqua, una possente copia d'acqua, ed i venti vi suscitano le tempeste. Ma per il sapiente la vista è il mare dell'uomo; e le forme vi suscitano le tempeste; l'udito, l'olfatto, il gusto, il tatto e la mente sono il mare dell'uomo: ed i suoni, gli odori, i sapori, i contatti ed i pensieri vi suscitano le tempeste. Chi ha superato questa tempesta di pensieri, di lui si può dire, che egli ha traversato il mare della sestupla sede dei sensi, con le sue onde ed i suoi vortici, con i suoi abissi ed i suoi mostri, che è scampato ed è giunto in salvo alla riva. » GOTAMO era un pensatore ed un poeta e, più di tutto. era un maestro di vita. Non è quindi male ricordare le parole di un moderno poeta e pensatore ed anch'egli, se anche in misura assai più limitata, un maestro di vita, dico GOETHE; il quale ha espresso pur egli un analogo paragone nel suo *Canto degli spiriti sulle acque*:

L'anima umana
  Somiglia a l'acqua:
  Dal cielo scende,
  Al ciel risale,
  E giù di nuovo
  Torna alla terra,
  Sempre mutando.
Dell'onda il vento
  E' il lieto amante,
  Ei dal profondo
  Mescola l'onda.
Anima umana,
  Somigli a l'acqua!
  Destino umano,
  Somigli al vento!

E veniamo ora al celebre paragone del fuoco, pronunciato dal BUDDHA sul monte di Gayâ, subito dopo il suo risveglio, e riportato sia nel *Samyut-*

takanikâyo che nel *Vinayapitakam*: « Tutto, o ascoltatori, è in fiamme: e quale tutto è in fiamme? La vista è in fiamme, le cose viste sono in fiamme, la conscienza visiva è in fiamme, e quel che dalla conscienza visiva sorge di piacere e di dolore, anch' esso è in fiamme. In fiamme con che? Col fuoco dell' amore, col fuoco dell' odio, col fuoco dell' ignoranza, col fuoco della nascita, della vecchiaia, della morte, del dolore, della pena, dello strazio, della disperazione: con tale fuoco è in fiamme. L' udito, l' olfatto, il gusto, il tatto, la mente sono in fiamme; i pensieri sono in fiamme, la conscienza mentale è in fiamme, e quel che da questa sorge di piacere e di dolore, anch' esso è in fiamme. In fiamme con che? In fiamme pel fuoco dell'amore, pel fuoco dell' odio, pel fuoco dell' ignoranza, pel fuoco della nascita, della vecchiaia, della morte, del dolore, della pena, dello strazio, della disperazione, per tale fuoco è in fiamme. A tale vista il nobile santo asceta si stacca dal fuoco della vita e ne cerca, ne cura l' estinzione. » Ed anche qui l' altro sommo poeta e pensatore moderno, SHAKESPEARE, ripete l' immagine dell' antico Maestro indiano, in *The merry Wives of Windsor*, V, 5: « Il piacere è solo un fuoco del sangue, acceso da non casto desiderio, covato nel cuore, di cui le fiamme aspirano, come i pensieri le soffiano, sempre più in alto:

Lust is but a bloody fire,
Kindled with unchaste desire,
Fed in heart, whose flames aspire,
As thoughts do blow them, higher and higher. »

Solo con lo spegnimento di tale fuoco si può raggiungere la pace, la pace del *nibbâna* o *nirvana*, o dell' estinzione spirituale di tutta la sete o *tanhâ*: che può essere raggiunta già in vita con la calma assoluta dello spirito, e può esser poi coronata, con la morte del corpo, con l' estinzione totale o *parinirvana*.

Infine, per chiudere la serie dei paragoni con gli elementi fondamentali dell' universo, ripeto qui ancora una volta, come riferimento all' elemento terra, il paragone geologico tratto dal libro XV del *Samyuttanikâyo*, in cui BUDDHA dice ai suoi discepoli: « Così come quasi, o mendicanti, se vi fosse una montagna di roccia compatta, lunga una lega, larga una lega ed alta una lega, senza fratture, spaccature o caverne, ed ogni cento anni venisse un uomo e la sfregasse una volta con una pezza di seta; quella grande montagna di roccia, o mendicanti, si consumerebbe più presto e finirebbe prima di un ciclo mondiale: tale è la lunga durata di un ciclo mondiale. E molti di tali cicli hanno girato: molte centinaia di cicli, molte migliaia di cicli, molte centinaia di migliaia di cicli. E perchè dico ciò? Perchè, o mendicanti, senza conoscibile principio e fine è il giro dell' esistenza, lungo il quale gli esseri, ciechi per ignoranza e tratti dalla sete di esistenza, passano attraverso l' agitazione delle forme e dei fenomeni, da

morte a vita e da vita a morte. » Come si vede, la grandiosità del paragone geologico dà della durata del tempo e dell' immensità dello spazio un' impressione forse anche più potente, e certo più accessibile, delle smisurate cifre matematiche dei *kalpa* e dei *yuga* dell' antica astronomia indiana e degli anni-luce della nostra moderna astronomia.

Vi sono, dunque, per l' antico pensiero indiano, buddhista, sei elementi fondamentali, che prendono parte nella costituzione del macrocosmo e del microcosmo: la terra, l'acqua, il fuoco, l' aria, lo spazio e la conscienza; e vi sono egualmente sei sensi: la vista, l' udito, l' olfatto, il gusto, il tatto, ed il pensiero. E vi è un continuo influire degli uni sugli altri, ed un continuo fluire degli uni e degli altri: senza che in essi si possa mai scoprire alcuna stabilità, *nicca,* nè alcuna durabile entità, *attâ,* salvo l' ens realissimum del dolore, *dukkha*; che sorge appunto dalla loro instabilità ed inentità. Sì che tutte le cose sono instabili, inessenziali e dolorose: *sabbe dhammâ aniccâ, anattâ, dukkha.*

Da tale mondo di impermanenza, di inessenza e di dolore cerca di salvarsi l' asceta mendicante buddhista: (come, del resto, l' asceta mendicante francescano, cristiano); senza, s' intende, la fede e la credenza in Dio o la speranza di una vita celeste: rinunziando alla vita ed al mondo e spegnendo la sete di vita, o *tanhî*, nell' estinzione del *nirvana.* E della beatitudine di tale estinzione danno prova le numerosissime espressioni di quegli asceti: come questa, per esempio, di uno dei primi e diretti discepoli del BUDDHA, il grande MOGGALLANO, nella strofa 1159 delle *Theragathâ* e nel *Mahâparinibbânasuttam*: « Instabili, invero, son tutte le cose, fatte per divenire, e divenute si sfanno: felice chi ne vede la fine.

Aniccâ vata sankhârâ,
uppadavayadhammino,
uppajjitvâ nirujjhanti:
tesam upasamo sukho. »

Naturalmente, tale fine, tale estinzione, a noi occidentali, che aspiriamo sempre alla vita, anche con « la concreata e perpetua sete del deiforme regno », appare quale un indesiderabile nulla; per la ragione, che LEOPARDI espone nel suo *Dialogo di Tristano e di un amico*: « Il genere umano, che ha creduto e crede tante scempiaggini, non crederà mai nè di non saper nulla, nè di non essere nulla, nè di non aver nulla da sperare. » Al che dobbiamo aggiungere quel che quasi contemporaneamente aveva scritto SCHOPENHAUER, il grande fratello spirituale di LEOPARDI, alla fine del primo volume della sua opera *Die Welt als Wille und Vorstellung*: che, cioè, quel che rimane dopo l' intera estinzione della volontà, o sete, di vita, è, per tutti quelli, che ne sono ancora pieni, certamente nulla. Ma anche, viceversa, per quelli, in cui la volontà s' è rinnegata, e la sete s' è estinta,

questo nostro tanto reale mondo, con tutti i suoi soli e le sue galassie, è – Nulla.

Ed ora chiudo questa chiacchierata, richiamando quel che a principio ho detto, sulla monomane monotonia dei miei pensieri, e ricordando, a tal proposito, quel che il bravo Cesare Pavese scrisse nel suo ultimo libro, *Dialoghi con Leucò*, prima di suicidarsi, a quarantadue anni, il 26 agosto 1950: « Siamo convinti che una grande rivelazione può uscire soltanto dalla testarda insistenza su una stessa difficoltà... Sappiamo che il più sicuro, e più rapido, modo di stupirci è di fissare imperterriti sempre lo stesso oggetto. » Il Pavese ripeteva così, forse consapevolmente, quel che Giordano Bruno aveva scritto, per sè, negli *Eroici furori*, scegliendo come suo simbolo, *ut robori robur*, l'annosa quercia:

Tu medesmo terreno
Mai sempre abbracci, fai colto e comprendi,
E di lui per le viscere distendi
Radici grate al generoso seno:
Io ad un solo oggetto
Ho fisso il spirto, il senso e l'intelletto.

Compiuta ricerca dell'estremo inferiore di un particolare funzionale

Nota del dr. **Ennio De Giorgi**, [1]) *presentata dal socio* **M. Picone**

(Adunanza del dì 5 gennaio 1952)

Sunto. – In questo lavoro mi occupo della ricerca del minimo del funzionale

$$I\,[x] = \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{x}^2 + qx^2 + 2rx)\,dt$$

nell'insieme delle curve di classe CD' con estremi mobili, risolvendo il problema nell'ipotesi che gli estremi possano variare in due insiemi chiusi e limitati qualunque; mostro come in questo semplice problema possono verificarsi circostanze interessanti ed a priori imprevedibili, dando inoltre alcuni esempi particolari dei risultati generali trovati.

1) *Premesse di carattere generale.*

Sia dato un piano cartesiano di coordinate t, x, e sia dato in esso un dominio Ω formato dei punti per cui

$$a \leq t \leq b \quad , \quad -\infty < x < +\infty .$$

Siano $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ tre funzioni continue con le loro derivate prime nell'insieme $a \leq t \leq b$ e sia $p(t) > 0$.

Dati allora due punti $P_1 \equiv (t_1\,, x_1)$ e $P_2 \equiv (t_2\,, x_2)$ nel dominio Ω tali $t_1 < t_2$ consideriamo l'insieme $\Gamma(P_1\,, P_2)$ delle curve di classe CD' congiungenti P_1 con P_2 e indichiamo con $m\,(P_1\,, P_2)$ l'estremo inferiore del funzionale

$$I\,[x] = \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{x}^2 + q.x^2 + 2rx)\,dt$$

nell'insieme $\Gamma(P_1\,, P_2)$.

---

[1]) Lavoro compiuto presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo del C. N. R.

L' equazione differenziale di EULERO, cui soddisfano le eventuali estremali è

$$\frac{d}{dt}(p\dot{x})-qx-r=0. \tag{1}$$

Ora è noto che possono darsi 3 casi [1]).

I) Esiste un punto interno all' intervallo $t_1 \,|\!-\!|\, t_2$ coniugato di t_1 rispetto all' equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}(p\dot{u})-qu=0 \tag{2}$$

in tal caso $m\ (P_1\ P_2)=-\infty$.

II) L' unico punto coniugato di t_1 nell' intervallo $t_1 \,|\!-\!|\, t_2$ è t_2; in tal caso o esistono infinite estremali che congiungono P_1 con P_2 ed allora $m\,(P_1\,,P_2)$ è dato dal valore assunto del funzionale I $[x]$ in corrispondenza ad una qualunque di esse, oppure non ne esiste alcuna ed allora $m\ (P_1\,,P_2)=-\infty$.

III) Nell' intervallo $t_1 \,|\!-\!|\, t_2$ non cadono punti coniugati di t_1; in questo caso $m\ (P_1\,,P_2)$ è dato dal valore assunto dal funzionale I $[x]$ in corrispondenza all' unica estremale che congiunge P_1 con P_2. Cerchiamo ora un' utile espressione di $m\ (P_1\,,P_2)$ nel caso III. Dato che nell' intervallo $t_1 \,|\!-\!|\, t_2$ non cadono punti coniugati di t_1 rispetto alla (2) esiste una sola soluzione della (2) la quale soddisfa le condizioni

$$u\,(t_1)=1 \quad , \quad u\,(t_2)=0. \tag{3}$$

Indicheremo questa soluzione con $u\ (t \mid t_1\,,t_2)$. Analogamente esiste una soluzione delle (2) che soddisfa le condizioni

$$u\,(t_1)=0 \quad ; \quad u\,(t_2)=1; \tag{4}$$

indicheremo questa soluzione con $u\ (t \mid t_2\,,t_1)$. Indicheremo infine con $\nu\,(t)$ una soluzione qualunque della equazione differenziale (1). Sia $x=\varphi\ (t \mid P_1\,,P_2)$ l' estremale congiungente P_1 con P_2; considerata come funzione della sola x la φ soddisfa l' equazione differenziale di EULERO (1) e quindi abbiamo

$$\varphi\ (t \mid P_1\,,P_2)=\nu\,(t)+(x_1-\nu\,(t_1))\ u\ (t \mid t_1\,,t_2)+(x_2-\nu\,(t_2))\ u\ (t \mid t_2\,,t_1). \tag{5}$$

La (5) ci mostra che φ (t | P_1 , P_2) considerate come funzione di $t\,,x_1\,,x_2$

[1]) Vedi: M. PICONE « *Corso di Analisi Superiore — Calcolo delle variazioni* » (Circolo Matematico di Catania 1922), pag 47-70.

(in questo paragrafo manteniamo sempre costanti t_1 e t_2) è continua con le derivate prime e seconde nel dominio formato dei punti che soddisfano le

$$(6) \qquad t_1 \leq t \leq t_2 \quad , \quad -\infty < x_1 < +\infty \quad , \quad -\infty < x_2 < +\infty ,$$

considerando la $\varphi\,(t \mid P_1 , P_2)$ come funzione di t , x_1 , x_2 la (1) si scrive

$$(7) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(p\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - q\,\varphi - r = 0.$$

Ora

$$(8) \qquad m\,(P_1 , P_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left(p\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 + q\,\varphi^2 + 2r\varphi\right) dt$$

e quindi, derivando rispetto ad x_2, si ha

$$(9) \qquad \frac{\partial m\,(P_1 , P_2)}{\partial x_2} = 2\int_{t_1}^{t_2}\left(p\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t\,\partial x_2} + q\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + r\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)dt = 2\left[p\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right]_{t=t_1}^{t=t_2} +$$

$$+ 2\int_{t_1}^{t_2}\left|-\frac{\partial}{\partial t}\left(p\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + q\varphi + r\right|\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\,dt = 2\left[p\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right]_{t=t_1}^{t=t_2} =$$

$$= 2p\,(t_2)\left(\frac{\partial \varphi\,(t \mid P_1 , P_2)}{\partial t}\right)_{t=t_2}$$

analogamente si vede che

$$(9') \qquad \frac{\partial m\,(P_1 , P_2)}{\partial x_1} = -2p\,(t_1)\left(\frac{\partial \varphi(t \mid P_1 , P_2)}{\partial t}\right)_{t=t}$$

ricordando le (5) dalle (9), (9′) abbiamo

$$(10) \quad \frac{\partial m(P_1 , P_2)}{\partial x_2} = 2p\,(t_2)\Big[\dot{\nu}\,(t_2) + (x_1 - \nu\,(t_1))\,\dot{u}(t_2 \mid t_1 , t_2) + (x_2 - \nu(t_2)\,)\,\dot{u}(t_2 \mid t_2 , t_1)\Big]$$

$$(10') \quad \frac{\partial m\,(P_1 , P_2)}{\partial x_1} = -2p(t_1)\Big[\dot{\nu}\,(t_1) + (x_1 - \nu(t_1))\dot{u}(t_1 \mid t_1 , t_2) + (x_2 - \nu(t_2))\dot{u}(t_1 \mid t_2 , t_1)\Big]$$

Posto $Q_1 \equiv (t_1 , \nu\,(t_1)\,)$, $Q_2 \equiv (t_2 , \nu(t_2)\,)$, $x = \nu(t)$ è l'estremale congiun-

gente Q_1 con Q_2 e quindi

$$(11) \qquad m(Q_1, Q_2) = \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{v}^2 + qv^2 + 2rv)\, dt ;$$

posto ora

$$(11') \quad \alpha_i = \frac{1}{2} \frac{\partial m(P_1, P_2)}{\partial x_i \partial x_k} \quad , \quad \beta_i = \left(\frac{\partial m(P_1, P_2)}{\partial x_i}\right)_{\substack{P_1 = Q_1 \\ P_2 = Q_2}} \quad , \quad \gamma = m(Q_1, Q_2)$$

abbiamo per le (10) , (10')

$$(12) \quad \begin{cases} \alpha_{11} = -p(t_1)\dot{u}(t_1 \mid t_1, t_2) \quad ; \quad \alpha_{22} = p(t_2)\dot{u}(t_2 \mid t_2, t_1) \\ \alpha_{12} = -p(t_1)\dot{u}(t_1 \mid t_2, t_1) = p(t_2)\dot{u}(t_2 \mid t_1, t_2) \\ \beta_1 = -2p(t_1)\dot{v}(t_1) \quad ; \quad \beta_2 = 2p(t_2)\dot{v}(t_2) \quad ; \quad \gamma = \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{v}^2 + qv^2 + 2rv)\, dt \end{cases}$$

Come conseguenza delle (11'), (12) abbiamo

$$(13) \quad m(P_1, P_2) = \alpha_{11}(x_1 - v(t_1))^2 + 2\alpha_{12}(x_1 - v(t_1))(x_2 - v(t_2)) + \alpha_{22}(x_2 - v(t_2))^2 + \\ + \beta_1(x_1 - v(t_1)) + \beta_2(x_2 - v(t_2)) + \gamma$$

2) *Indicazione dei tre casi possibili e trattazione dei primi due.*

Dati nel solito dominio Ω due insiemi chiusi e limitati C_1 e C_2 , detti rispettivamente $\theta(C_1)$ e $\theta(C_2)$ gli insiemi proiezioni sull' asse t degli insiemi C_1 e C_2, detti τ_1' e τ_1'' il minimo ed il massimo di $\theta(C_1)$ e detti τ_2' e τ_2'' il minimo ed il massimo di $\theta(C_2)$ supponiamo che si abbia :

$$\tau_1'' < \tau_2'.$$

Considerando le coppie (P_1, P_2) come punti di un S_4 euclideo di coordinate (t, x_1, t_2, x_2), le coppie per cui P_1 è contenuto in C_1 e P_2 è contenuto in C_2 formano un insieme chiuso e limitato K.

Indichiamo ora con X l'insieme delle curve di classe CD_1 che congiungono i punti dell' insieme C_1 con quelli dell' insieme C_2 e chiamano $\mu(X)$ l'estremo inferiore del fnnzionale $I[x]$ nell' insieme X; $\mu(X)$ sarà evidentemente uguale all' estremo inferiore di $m(P_1, P_2)$ nell' insieme K. Nel nostro studio distinguiamo 3 casi :

I) Esiste un punto interno all' intervallo $\tau_1' \mid\!-\!\mid \tau_2''$ coniugato di τ_1' rispetto alla (2).

II) Non esiste nell' intervallo $\tau_1' \mid\!-\!\mid \tau_2''$ alcun punto che sia coniugato di τ_1' rispetto alla (2).

III) Il punto τ_2'' è l' unico punto dell' intervallo $\tau_1' \mid\!-\!\mid \tau_2''$ coniugato di τ_1' rispetto alla (2).

Nel primo caso esiste almeno un punto P_1^* di C_1 ed uno P_2^* di C_2, aventi rispettivamente per proiezioni τ_1' e τ_2''; allora $m(P_1^*, P_2) = -\infty$ e quindi $\mu(X) = -\infty$.

Nel secondo caso, presa comunque una coppia (P_1, P_2) nell' insieme K, nell' intervallo $t_1 \mid\!-\!\mid t_2$ non cade alcun punto coniugato di t_1 e quindi $m(P_1, P_2)$ è dato dalla (13). Siano $u_1(t)$ e $u_2(t)$ due soluzioni indipendenti della (2) avremo allora

$$(14) \qquad u(t \mid t_1, t_2) = \frac{\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1(t_2) & u_2(t_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(t_1) & u_2(t_1) \\ u_1(t_2) & u_2(t_2) \end{vmatrix}}$$

$$(14') \qquad u(t \mid t_2, t_1) = \frac{\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1(t_1) & u_2(t_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(t_2) & u_2(t_2) \\ u_1(t_1) & u_2(t_1) \end{vmatrix}}$$

dalle (12), (14), (14') segue

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_{11} &= p(t_1) \frac{\begin{vmatrix} \dot u_1(t_1) & \dot u_2(t_1) \\ u_1(t_2) & u_2(t_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(t_2) & u_2(t_2) \\ u_1(t_1) & u_2(t_1) \end{vmatrix}} \\ \alpha_{12} &= -p(t_1) \frac{\begin{vmatrix} \dot u_1(t_1) & \dot u_2(t_1) \\ u_1(t_1) & u_2(t_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(t_2) & u_2(t_2) \\ u_1(t_1) & u_2(t_1) \end{vmatrix}} = -p(t_2) \frac{\begin{vmatrix} \dot u_1(t_2) & \dot u_2(t_2) \\ u_1(t_2) & u_2(t_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(t_2) & u_2(t_2) \\ u_1(t_1) & u_2(t_1) \end{vmatrix}} \\ \alpha_{22} &= p(t_2) \frac{\begin{vmatrix} \dot u_1(t_2) & \dot u_2(t_2) \\ u_1(t_1) & u_2(t_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(t_2) & u_2(t_2) \\ u_1(t_1) & u_2(t_1) \end{vmatrix}} \end{aligned} \right.$$

Poichè il determinante $\begin{vmatrix} u_1(t_2) & u_2(t_2) \\ u_1(t_1) & u_2(t_1) \end{vmatrix}$ si annulla solo quando t_1 e t_2 sono coniugati rispetto alla (2) e tale circostanza non si verifica mai nell' insieme K, dalle (12), (13), (15) si deduce che $m(P_1, P_2)$ è nell' insieme

K una funzione continua e quindi ammette un minimo; tale minimo, per quanto si è visto, coincide con $\mu(X)$. Se (P_1^*, P_2^*) è una coppia minimante, l'estremale congiungente P_1^* con P_2^* rende minimo il funzionale $I[x]$ nell'insieme X. Osserviamo che se P_1^* è interno a C_1 deve essere

$$(16) \qquad \left|\frac{\partial m(P_1, P_2)}{\partial x_1}\right|_{(P_1, P_2)=(P_1^*, P_2^*)} = \left[\frac{\partial m(P_1, P_2)}{\partial t_1}\right]_{(P_1, P_2)=(P_1^*, P_2^*)} = 0.$$

Se esiste una porzione di curva regolare data dalle

$$(17) \qquad x = \varphi(s) \quad , \quad t = \psi(s) \quad ; \quad s_1 \leq s \leq s_2$$

contenuta nell'insieme C_1 ed esiste un valore s^* tale che $s_1 < s^* < s_2$ ed inoltre $P_1^* = P(s^*)$, deve aversi

$$(18) \qquad \dot{\varphi}(s^*)\left[\frac{\partial m(P_1, P_2)}{\partial x_1}\right]_{(P_1, P_2)=(P_1^*, P_2^*)} + \dot{\psi}(s^*)\left[\frac{\partial m(P_1, P_2)}{\partial t_1}\right]_{(P_1, P_2)=(P_1^* P_2^*)} = 0$$

relazioni analoghe alle (16), (18) si ritrovano per P_2^*.

3) *Trattazione del terzo caso.*

Discutiamo ora il caso in cui τ_2'' è l' unico punto dell'intervallo $\tau_1' \mid - \mid \tau_2''$ coniugato di τ' rispetto alla (2). Indicato allora con Q_1 un punto C_1 avente τ_1' per proiezione sull' asse delle t e con Q_2 un punto di C_2 avente τ_2'' per proiezione sull' asse delle t; se non esiste alcuna estremale congiungente Q_1 con Q_2 si ha $m(Q_1, Q_2) = -\infty$ e quindi $\mu(X) = -\infty$. Parimenti avremo $\mu(X) = -\infty$ qualora oltre Q_2 esiste un altro punto $\overline{Q_2}$ di C_2 avente per proiezione τ_2''; infatti, per i noti teoremi sulle equazioni differenziali lineari, se esiste un'estremale congiungente Q_1 con Q_2, non esiste alcuna estremale, congiungente Q_1 con $\overline{Q_2}$ e quindi si ha $m(Q_1, \overline{Q_2}) = -\infty$, $\mu(X) = -\infty$; per lo stesso motivo si ha $\mu(X) = -\infty$, quando esistono due punti $Q_1, \overline{Q_1}$ aventi per proiezione τ_1'. Rimane dunque da esaminare il caso in cui esiste un solo punto Q_1 di C_1 avente per proporzione τ_1' e un solo punto Q_2 di C_2 avente per proiezioni τ_2'', ed esiste inoltre una estremale congiungente Q_1 con Q_2. In ogni punto dell' insieme $\overline{K}$, ottenuto dall' insieme K privandolo del punto (Q_1, Q_2), la funzione $m(P_1, P_2)$ è evidentemente una funzione continua, quindi $\mu(X)$ può essere dato supponendo che $\overline{K}$ abbia (Q_1, Q_2) come elemento di accumulazione):

1) Dal valore $m(P_1^*, P_2^*)$ calcolato per una coppia (P_1, P_2) dell' insieme $\overline{K}$

2) Dal valore $m(Q_1, Q_2)$

3) Dal $\lim'_{(P_1, P_2) \to (Q_1, Q_2)} m(P_1, P_2)$ (su $\overline{K}$)

Sulla prima eventualità si può osservare che se il punto P_1^* è interno all' insieme C_1 o appartiene ad una porzione di curva contenuta in C_1 valgono rispettivamente le (16) o le (18).

Se si sceglie la soluzione $\nu(t)$ della (1), di cui ci serviamo per calcolare le (12), (13), in modo che la estremale $x = \nu(t)$ passi per Q_1 e per Q_2 si avrà

$$(19) \qquad m(Q_1, Q_2) = \gamma(\tau_1', \tau_2'')$$

$$(20) \qquad \lim_{(P_1, P_2) \to (Q_1, Q_2)}' \left\{ |X_1 - \nu(t_1)| + |X_2 - \nu(t_2)| \right\} (\text{su } \overline{K}) = 0.$$

Quindi dalle (12), (13), (20) segue

$$(21) \qquad \lim_{(P_1, P_2) \to (Q_1, Q_2)}' m(P_1, P_2)(\text{su } \overline{K}) = \gamma(\tau_1', \tau_2'') + \lim_{(P_1, P_2 \to (Q_1, Q_2)}' \lambda(P_1, P_2)(\text{su } \overline{K})$$

ove abbiamo posto

$$(22) \qquad \lambda(P_1, P_2) = \alpha_{11}(x_1 - \nu(t_1))^2 + 2\alpha_{12}(x_1 - \nu(t_1))(x_2 - \nu(t_2)) + \alpha_{22}(x_2 - \nu(t_2))^2.$$

Scegliamo ora le soluzioni $u_1(t)$, $u_2(t)$ delle (2) che compaiono nelle (15) in modo che soddisfano le condizioni iniziali

$$(25) \qquad u_1(\tau_1') = 0 \quad , \quad \dot{u}_1(\tau_1') = 1 \quad ; \quad u_2(\tau_1') = 1 \quad ; \quad \dot{u}_2(\tau_1') = 0$$

dalle (23) segue

$$(24) \qquad u_1(\tau_2'') = 0 \quad ; \quad \dot{u}_1(\tau_2'') < 0 \quad ; \quad u_2(\tau_2'') < 0$$

e quindi per le (15), (22) abbiamo in tutto $\overline{K}$

$$(25) \qquad \lambda(P_1, P_2) = \frac{p(\tau_1') u_2(\tau_2'') (x_1 - \nu(t_1))^2 + \varepsilon_{11}}{\dot{u}_1(\tau_2'')(t_2 - \tau_2'') - u_2(\tau_2'')(t_1 - \tau_1') + \eta} +$$
$$+ \frac{-2\sqrt{p(\tau_1') u_2(\tau_2'') p(\tau_2'') \dot{u}_1(\tau_2'')}\,(x_1 - \nu(t_1))(x_2 - \nu(t_2)) + \varepsilon_{12}}{\dot{u}_1(\tau_2'')(t_2 - \tau_2'') - u_2(\tau_2'')(t_1 - \tau_1') + \eta}$$
$$+ \frac{p(\tau_2'') \dot{u}_1(\tau_2'')(x_2 - \nu(t_2))^2 + \varepsilon_{22}}{\dot{u}_1(\tau_2'')(t_2 - \tau_2'') - u_2(\tau_2'')(t_1 - \tau_1') + \eta}$$

ove $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}, \eta$ sono funzioni di (P_1, P_2) infinitesime per $(P_1, P_2) \to (Q_1, Q_2)$ (su $\overline{K}$), di ordine superiore a quello di $(|t_2 - \tau_2''| + |t_1 + \tau_1'|)$. Poniamo ora

$$(26) \qquad \xi_1 = \sqrt{-u_2(\tau_2'')}\,(x_1 - \nu(t_1)) \quad ; \quad \tau_1 = -u_2(\tau_2'')(t_1 - \tau_1')$$

$$(26') \qquad \xi_2 = \sqrt{-\dot{u}_1(\tau_2'')}\,(x_2 - \nu(t_2)) \quad ; \quad \tau_2 = \dot{u}_1(\tau_2'')(t_2 - \tau_2'').$$

Poichè, in tutto l'insieme $\overline{K}$, $t_1 \geq \tau_1'$ e $t_2 \geq \tau_2''$, le (24), (26), (26') ci assicurano che τ_1 e τ_2 sono quantità non negative e quindi $(\tau_1+\tau_2)$ e $(|t_2-\tau_2''|+|t_1-\tau_1'|)$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $(P_1, P_2) \to (Q_1, Q_2)$ su $\overline{K}$.

La (25) si può allora scrivere nella forma

$$(27) \qquad \lambda(P_1, P_2) = -\frac{p(\tau_1')\xi_1^2 + 2\sqrt{p(\tau_1')p(\tau_2'')}\,\xi_1\xi_2 + p(\tau_2'')\xi_2^2 + \varepsilon}{\tau_1+\tau_2+\eta}$$

ove ε ed η sono infinitesimi di ordine superiore a quello di $(\tau_1+\tau_2)$ per $(P_1, P_2) \to (Q_1, Q_2)$ (su $\overline{K}$).

Supponendo ora che τ_1' sia elemento di accumulazione per $\theta(C_1)$ e τ_2'' sia elemento di accumulazione per $\theta(C_2)$, sia

$$(28) \qquad \lim_{P_1 \to Q_1}'' \frac{\xi_1^2}{\tau_1} (\text{su } C_1) = \rho_1 \; ; \qquad \lim_{P_2 \to Q_2}'' \frac{\xi_2^2}{\tau_2} (\text{su } C_2) = \rho_2 .$$

Detto allora K_1 l'insieme delle coppie (Q_1, P_2) aventi per primo elemento Q_1 e per secondo un punto variabile nell'insieme $(C_2 - Q_2)$, e detto K_2 l'analogo insieme delle coppie (P_1, Q_2), evidentemente K_1 e K_2 saranno contenuti nell'insieme $\overline{K}$ e quindi si avrà

$$(29) \qquad \lim_{(P_1, P_2) \to (Q_1, Q_2)}' \lambda(P_1, P_2)(\text{su } K_1) \geq \lim_{(P_1, P_2) \to (Q_1, Q_2)}' \lambda(P_1, P_2)(\text{su } \overline{K})$$

$$(29') \qquad \lim_{(P_1, P_2) \to (Q_1, Q_2)}' \lambda(P_1, P_2)(\text{su } K_2) \geq \lim_{(P_1, P_2) \to (Q_1, Q_2)}' \lambda(P_1, P_2)(\text{su } \overline{K})$$

delle (27), (28) segue

$$(30) \qquad \lim_{(P_1, P_2) \to (Q_1, Q_2)}' \lambda(P_1, P_2)(\text{su } K_1) = -\rho_1\, p(\tau_1')$$

$$(30') \qquad \lim_{(P_1, P_2) \to (Q_1, Q_2)}' \lambda(P_1, P_2)(\text{su } K_2) = -\rho_2\, p(\tau_2'')$$

inoltre per le (27), (28) e per i noti teoremi sui massimi e sui minimi delle forme quadratiche abbiamo

$$(31) \qquad \lim_{(P_1, P_2) \to (Q_1, Q_2)}' \lambda(P_1, P_2)(\text{su } \overline{K}) \geq -\left(\sqrt{p(\tau_1')\rho_1} + \sqrt{p(\tau_2'')\rho_2}\right)^2 .$$

dalle (29), (29'), (30), (30'), (31) segue

$$(32)\quad -\rho_1 p(\tau_1') \geq \lim_{(P_1, P_2)\to(Q_1, Q_2)}{}' \lambda(P_1, P_2)(\text{su } K) \geq -\left(\sqrt{p(\tau_1')\rho_1} + \sqrt{p(\tau_2'')\rho_2}\right)^2$$

$$(32')\quad -\rho_2 p(\tau_2'') \geq \lim_{(P_1, P_2)\to(Q_1, Q_2)}{}' \lambda(P_1, P_2)(\text{su } \bar{K}) \geq -\left(\sqrt{p(\tau_1')\rho_1} + \sqrt{p(\tau_2'')\rho_2}\right)^2$$

Le (32), (32′) forniscono un'utile limitazione dei valori del $\lim'_{(P_1, P_2)\to(Q_1, Q_2)} \lambda(P_1, P_2)$ (su $\bar{K}$) e quindi in virtù delle (21) ai valori del $\lim'_{(P_1, P_2)\to(Q_1, Q_2)} m(P_1, P_2)$ (su $\bar{K}$).

Risultati più precisi possono ottenersi sotto le seguenti ipotesi:

I) Esistono i limiti

$$(33)\quad \lim_{P_1\to Q_1} \frac{\xi_1}{\sqrt{\tau_1}}(\text{su } C_1) = \delta_1 \quad ; \quad \lim_{P_2\to Q_2} \frac{\xi_2}{\sqrt{\tau_2}}(\text{su } C_2) = \delta_2 .$$

II) Se $\delta_1 \cdot \delta_2 > 0$ l'insieme K^* formato dalle coppie (P_1, P_2) dei punti appartenenti rispettivamente agli insiemi $(C_1 - Q_1)$ e $(C_2 - Q_2)$ e soddisfacenti le

$$(34)\quad \frac{\sqrt{\tau_1}}{\sqrt{\tau_2}} = \frac{\delta_1 \sqrt{p(\tau_1')}}{\delta_2 \sqrt{p(\tau_2'')}}$$

non è vuoto ed ammette (Q_1, Q_2) come elemento di accumulazione.

Le ipotesi I), II) sono evidentemente verificate quando gli insiemi C_1 e C_2 si riducono e due porzioni di curva regolare di classe $C^{(2)}$ aventi Q_1 e Q_2 come estremi. Ammessa l'ipotesi I), le (27) ci assicurano che, se $\delta_1 \cdot \delta_2 \leq 0$, il $\lim'_{(P_1, P_2)\to(Q_1, Q_2)} \lambda(P_1, P_2)$ (su $\bar{K}$) è dato dal minore dei due numeri $-\delta_1^2\, p(\tau_1'), -\delta_2^2\, p(\tau_2'')$.

Se invece $\delta_1 \cdot \delta_2 > 0$ ed è verificata la ipotesi II) abbiamo

$$(35)\quad \lim_{(P_1, P_2)\to(Q_1, Q_2)}{}' \lambda(P_1, P_2)(\text{su } K^*) \geq \lim_{(P_1, P_2)\to(Q_1, Q_2)}{}' \lambda(P_1, P_2)(\text{su } \bar{K})$$

d'altra parte, per le (27), (33), (34), abbiamo

$$(36)\quad \lim_{(P_1, P_2)\to(Q_1, Q_2)}{}' \lambda(P_1, P_2)(\text{su } K^*) = -\left(\sqrt{p(\tau_1')}\,\delta_1 + \sqrt{p(\tau_2'')}\,\delta_2\right)^2$$

e poichè, come si vede dalle (28), (33),

$$(37)\quad \delta_1^2 = \rho_1 \quad ; \quad \delta_2^2 = \rho_2$$

dalle (35), (36), (32) segue

$$(38)\qquad \lim_{(P_1\,.\,P)\to(Q_1\,,\,Q_2)}{}' \lambda(P_1,P)(\text{su } \bar{K}) = -\left(\sqrt{p(\tau_1')}\,\delta_1 + \sqrt{p(\tau'')}\,\delta_2\right)^2$$

Osserviamo che il caso finora escluso in cui Q_1, sia un punto isolato di C_1, oppure Q_2 sia un punto isolato di C_2, equivale, come subito si verifica osservando le (30), (30′), (32), (32′), al caso in cui si abbia rispettivamente $\rho_1 = 0$ oppure $\rho = 0$.

4) *Esempi.*

Consideriamo il funzionale

$$I[x] = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{x}^2 - x^2 + 2\,t\,x)\,dt,$$

la sua equazione di Eulero è

$$(39)\qquad \ddot{x} + x = t$$

l' equazione omogenea associata è

$$(40)\qquad \ddot{x} + x = 0.$$

Evidentemente perchè in un intervallo $t_1 \,|\!-\!|\, t$ non cadano punti coniugati di t_1 rispetto alla (40) occorre e basta che sia $(t_2 - t_1) < \pi$; in questo caso abbiamo

$$(41)\qquad u(t\,|\,t_1\,,t_2) = \frac{\text{sen}\,(t-t_2)}{\text{sen}\,(t_1-t_2)}\ ;\quad u(t\,|\,t_2\,,t_1) = \frac{\text{sen}\,(t-t_1)}{\text{sen}\,(t_2-t_1)}\,.$$

Poichè la (39) ammette la soluzione $x = t$ possiamo porre $\nu(t) = t$ ed allora per le (12) abbiamo

$$(42)\qquad \begin{cases} \alpha_{11} = \text{cotang}\,(t_2-t_1)\ ,\quad \alpha_{12} = \dfrac{-1}{\text{sen}\,(t_2-t_1)}\ ,\quad \alpha_2 = \text{cotang}\,(t_2-t_1) \\ \beta_1 = -2\ ,\quad \beta_2 = 2\ ,\quad \gamma = \dfrac{t_2^3 - t_1^3 + 3t_2 - 3t_1}{3}\,. \end{cases}$$

Dati allora due punti $P_1 \equiv (x_1, t_1)$, $P_2 \equiv (x_2\,, t_2)$ soddisfacenti le condi-

zioni $0 < t_2 - t_1 < \pi$, per la (13) e la (42) si ha

$$(43)\quad m(P_1, P_2) = \frac{(x_1 - t_1)^2}{\operatorname{tang}(t_2 - t_1)} + \frac{(x_2 - t_2)^2}{\operatorname{tang}(t_2 - t_1)} - \frac{2(x_2 - t_2)(x_1 - t_1)}{\operatorname{sen}(t_2 - t_1)} + $$
$$+ 2(x_2 - t_2) - 2(x_1 - t_1) + \frac{t_2^3 - t_1^3 + 3t_2 - 3t_1}{3}.$$

Cerchiamo ora l' estremo inferiore del funzionale $I[x]$ nell' insieme X delle curve appoggiate a C_1 e C_2, nel caso in cui C_1 si riduca al punto $Q_1 \equiv (0, 0)$ e C_2 alla porzione di curva regolare data dalle

$$(44)\qquad x_2 = \pi + s^2 - s \;, \quad t_2 = \pi - s \;; \quad 0 \leq s \leq \frac{\pi}{4};$$

siamo evidentemente nel caso terzo studiato nel numero precedente e quindi, posto $Q_2 \equiv (\pi, \pi)$, $\mu(X)$ può essere dato da $m(Q_1, Q_2)$, dal $\lim'_{P_2 \to Q_2} m(Q_1, P_2)$ (su C_2), dal valore di $m(Q_1, P_2(s))$ calcolato in un punto s dell' intervallo $0 \vdash \frac{\pi}{4}$.

Poichè l' estremale $x = t$ passa per Q_1 e per Q

$$(45)\qquad m(Q_1, Q) = \frac{\pi^3}{3} + \pi.$$

Usando le notazioni (26), (28) e tenendo presente l' ultima osservazione del paragrafo precedente si ha

$$(46)\qquad \lim''_{P_2 \to Q} \frac{\xi_2^2}{\tau_2} \text{ (su } C_2) = \rho_2 = 0 \;; \quad \rho_1 = 0$$

e quindi per le (32'), (21) abbiamo

$$(47)\qquad \lim'_{P_2 \to Q} m(Q_1, P_2) \text{ (su } C_2) = m(Q_1, Q_2) = \frac{\pi^3}{3} + \pi.$$

Consideriamo ora i valori di s compresi nell' intervallo $0 \vdash \frac{\pi}{4}$; per le (43) abbiamo

$$(48)\qquad m(Q_1, P_2(s)) = \frac{-s^4}{\operatorname{tang}(s)} + 2s^2 + \frac{(\pi - s)^3}{3} + (\pi - s)$$

derivando la (48) abbiamo

$$(49)\qquad \frac{dm(Q_1, P_2(s))}{ds} = \frac{-4s^3}{\operatorname{tang} s} + \frac{s^4}{\operatorname{sen}^2 s} + 4s - (\pi - s)^2 - 1$$

poichè, per $0 < s < \frac{\pi}{4}$, si ha $\frac{1}{\text{tang}\, s} > \frac{1}{2s}$, $\frac{1}{\text{sen}^2 s} < \frac{2}{s^2}$ abbiamo in tutto l'intervallo $0 \,—|\, \frac{\pi}{4}$

$$(50) \qquad \frac{dm(Q_1\,,\,P_2(s))}{ds} < 4s - (\pi - s)^2 - 1 < 0\,;$$

è quindi escluso che $\mu\,(X)$ sia dato del valore di $m\;(Q_1\,,\,P_2\,(s))$ calcolato in un punto interno all'intervallo $0 \;|—|\; \frac{\pi}{4}$. Per la (48) si ha

$$(51) \qquad m\left(Q_1\,,\,P_2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi^2}{8} + \frac{9\pi^3}{64} - \frac{\pi^4}{256}$$

e poichè, come si vede dalle (47), (51), $m\left(Q_1\,,\,P\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ è minore di $m(Q_1\,,\,Q_2)$, $\mu\,(X)$ è dato da $m\left(Q_1\,,\,P_2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Passiamo ora al caso in cui C_1 coincide con $Q_1 \equiv (0\,,\,0)$ e C è costituito dalla porzione di curva regolare

$$(52) \qquad x_2 = \pi + s - s^2 \quad , \quad t_2 = \pi - s^2 \quad ; \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{11}\,.$$

Come nell'esempio precedente, ci troviamo nel caso terzo; l'insieme C contiene il punto $Q_2 \equiv (\pi\,,\,\pi)$, ma questa volta si ha

$$(53) \qquad \lim_{P_2 \to Q_2}{}' \frac{\xi^2}{\tau} \,(\text{su } C) = \rho_2 = 1 \quad ; \quad \rho_1 = 0$$

e quindi

$$(54) \qquad \lim_{P_2 \to Q_2}{}' m(Q_1\,,\,P)\,(\text{su } C_2) = m(Q_1\,,\,Q_2) + 1 = \frac{\pi^3}{3} + \pi + 1.$$

Per i valori di s compresi nell'intervallo $0 \,—|\, \frac{1}{11}$, si ha

$$(55) \qquad m(Q_1\,,\,P_2(s)) = -\frac{s^2}{\text{tang}\, s^2} + 2s + \frac{(\pi - s^2)^3}{3} \qquad (\pi - s^2)$$

derivando la (55) abbiamo

$$(56) \qquad \frac{dm(Q_1\,,\,P_2(s))}{ds} = \frac{-2s}{\text{tang}\, s^2} + \frac{2s^3}{\text{sen}^2 s^2} + 2 - 2s(\pi - s^2)^2 - 2s$$

poichè per $0 < s < \frac{1}{11}$ si ha $\frac{1}{\operatorname{tang} s^2} < \frac{1}{s^2}$, $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 s^2} > \frac{1}{s^4}$, abbiamo in tutto lo intervallo $0 \,\text{—}\!\mid \frac{1}{11}$

$$(57) \qquad \frac{dm(Q_1, P_2(s))}{ds} > 2 - 2s(\pi - s^2)^2 - 2s > 0.$$

La (57) ci assicura che $\mu(X)$ non può essere dato dal valore di $m(Q_1, P_2(s))$ calcolato in un punto dell' intervallo $0 \,\text{—}\!\mid \frac{1}{11}$ e quindi $\mu(X) = \lim'_{P_2 \to Q_2} m(Q_2, P_2)$ (su C_2).

Consideriamo infine il caso in cui C_1 coincide col punto $Q_1 = (0, 0)$ e C_2 con la porzione di curve regolare

$$(58) \qquad x_2 = \pi + s, \, t_2 = \pi - s^3; \; 0 \leq s \leq 1$$

in questo caso abbiamo

$$(59) \qquad \lim''_{P \to Q} \frac{\xi_2^2}{\tau} \text{ (su } C_2) = \rho_2 = +\infty \quad ; \quad \rho_1 = 0$$

e quindi

$$(60) \qquad \mu(\chi) = \lim'_{P_2 \to Q_2} m(Q_1, P_2) \text{ (su } C_2) = -\infty.$$

UN' INTERPRETAZIONE MEDIANTE ALGEBRE DEI CAMPI FINITI DI GALOIS DI ORDINE p^n

Nota di **Angelo Fadini**, *presentata dal socio* **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 2 febbraio 1952)

Sunto. — Si dimostra che il campo finito di GALÒIS di ordine p^n, con p numero primo costituisce un' algebra equivalente all' algebra dei numeri n potenziali definita nel corpo numerico $C[p]$.

Dall' identità:

$$p^n - 1 = (p-1)(1+p+p^2+\ldots+p^{n-1})$$

si rileva che gli elementi X della classe dei residui (mod. p^n), con p numero primo, possono assumere la forma:

$$[1] \qquad X = x_1 p^0 + x_2 p + x_3 p^2 + \ldots + x_n p^{n-1}$$

nelle quali $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sono numeri del corpo numerico finito $C[p]$, costituito dalla classe dei residui (mod. p).

Diremo, col SEGRE [1]), campo finito di GALOIS di ordine p l' insieme delle classi X.

Ponendo nella [1]:

$$p^i = u_{i+1} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

si ha ovviamente nel campo:

$$[3] \qquad u_i \cdot u_j = \begin{cases} u_{i+j-1} & \text{se} \quad i+j-1 < n \\ 0 & \text{se} \quad i+j-1 \geq n \end{cases}$$

Con tali posizioni la [1] può esere scritta nella forma:

$$[4] \qquad X = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n$$

Al variare delle x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, nel corpo numerico finito $C[p]$, X varia e descrive l' insieme di tutti gli elementi del campo finito di GALOIS di ordine p^n.

---

[1]) B. SEGRE. *Lezioni di geometria moderna*, Vol. I. Bologna, Zanichelli, 1948.

Ma la [4], al variare delle x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ nel $C[p]$, descrive, in tale corpo, un' algebra. Infatti se Y è un altro elemento dell' insieme ed è:

$$Y=\sum_{i=1}^{i=n} y_i\, u_i$$

si ha:

$$X+Y=(x_1+y_1)u_1+(x_2+y_2)u_2+\ldots+(x_n+y_n)u_n$$

e per le [3] risulta:

$$XY=x_1y_1u_1+(x_1y_2+x_2y_1)u_2+(x_1y_3+x_2y_2+x_3y_1)u_3+\ldots$$

Inoltre se μ è un elemento non nullo del corpo $C[p]$ si ha:

$$\mu X=\mu x_1u_1+\mu x_2u_2+\ldots+\mu x_nu_n\,.$$

La somma ed il prodotto scalare godono della proprietà commutativa ed il prodotto, che è commutativo, gode della proprietà distributiva rispetto alla somma. Possiamo quindi affermare che l' insieme descritto da X, al variare delle sue coordinate x_i $(i=1,2,\ldots n)$ è un' algebra commutativa [1]).

La tabella di moltiplicazione delle unità $u_1, u_2, \ldots, u_n$, scritta per steso è la seguente:

	u_2	$u_{,}$	u_3	u_4	u_5	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$u_{n\;2}$	u_{n-1}	u_n
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	u_{n-2}	u_{n-1}	u_n
u	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	u_{n-1}	u_n	0
u_3	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	u_n	0	0
u_4	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
u_{n-2}	u_{n-2}	u_{n-1}	u_n	0	0	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	0	0	0
u_{n-1}	u_{n-1}	u_n	0	0	0	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	0	0	0
u_n	u_n	0	0	0	0	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	0	0	0

Ma questa è la tabella di moltiplicazione delle unità dell' algebra dei numeri che il prof. SPAMPINATO [2]) ha chiamato numeri n-potenziali, dunque sussiste il teorema:

---

[1]) G. SCORZA, *Corpi numerici ed Algebre*, parte II. Messina, Principato, 1921.

[2]) N. SPAMPINATO, *Lezioni di geometria Superiore*, Vol. V. Napoli, Pironti, 1948.

il campo finito di Galois *di ordine* p^n, *con* p *numero primo, costituisce un' algebra che è equivalente all' algebra dei numeri n-potenziali definita nel corpo* $C[p]$.

Citiamo qualche esempio. I quattro numeri della classe dei residui modulo 4, corrispondono ai quattro elementi:

$$\beta = \begin{Vmatrix} x_1 & \blacksquare \\ 0 & x_1 \end{Vmatrix} = x\ u_1 + x_2 u_2$$

dell' algebra doppia B definita nel corpo $C[2]$ [1]) con le unità $u_1 = 1$ ed $u_2 = 2$. La tabella di moltiplicazione di quest' algebra è:

(I)

	u_1	u_2
u_1	u_1	u_2
u_2	u_2	0

Analogamente gli otto numeri della classe dei residui mod. 8 corrispondono agli otto elementi:

$$\beta = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{Vmatrix} = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$$

dell' algebra tripotenziale definita nel $C[2]$ con le unità:

$$u_1 = 1 \quad , \quad u_2 = 2 \quad . \quad u_3 = 4$$

che si moltiplicano con la tabella:

(II)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	u_2	u_3
u_2	u_2	u_3	0
u_3	u_3	0	0

Così pure i 27 numeri costituenti la classe dei residui mod. 9 corrispondono ai 27 elementi β dell' algebra tripotenziale definita nel $C[3]$ con le unità $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 9$
la cui tabella di moltiplicazione è la stessa (II) già segnata.

---

[1]) A. Fadini, *La prima rappresentazione degli S_r proiettivi legati a due algebre doppie dotate di modulo nel corpo C [2].* Rend. Acc. Scienze Fisiche e mat., serie 4ª, Vol. XVII. Napoli, 1950.

Sugli emimorfismi superiori ed inferiori tra reticoli

Nota del dott. **Giovanni Zacher**, *presentata dal socio* **Guido Zappa**

(Adunanza del dì 2 febbraio 1952)

Sunto. — Si ottengono alcune caratterizzazioni degli emimorfismi superiori ed inferiori tra reticoli di lunghezza finita.

Nella presente nota si studiano alcune proprietà di cui godono gli emimorfismi superiori ed inferiori tra reticoli [1]).

La nota è suddivisa in due paragrafi. Nel primo paragrafo si trova il seguente teorema conclusivo: Condizione necessaria e sufficiente affinchè un reticolo L di dimensione finita ammetta un emimorfismo superiore (inferiore), è che L contenga un sottoinsieme S di elementi soddisfacenti alle seguenti condizioni:

α) Se a, b sono due elementi di S pure l'elemento $a \wedge b$ ($a \vee b$) appartiene ad S.

β) S contiene l'elemento I (0) di L.

Nel secondo paragrafo si applicano i risultati del paragrafo 1 allo studio degli emimorfismi dei reticoli soddisfacenti alle due condizioni:

$\overline{\alpha}$) L ha dimensione finita.

$\overline{\beta}$) Ogni elemento di L di dimensione ≥ 2 copre due elementi distinti di L.

Si dimostra il teorema: Condizione necessaria e sufficiente affinchè un reticolo distributivo L soddisfacente alle condizioni $\overline{\alpha}$ e $\overline{\beta}$ sia in emimorfismo superiore con un reticolo M' soddisfacente alle condizioni $\overline{\alpha}$ e $\overline{\beta}$, è che il numero degli atomi di M' non superi quello di L.

Inoltre: Se S e L è un reticolo di lunghezza finita l, il cui ordine non supera la potenza del numerabile, soddisfacente alla condizione $\overline{\beta}$, esiste sempre un reticolo distributivo S di lunghezza l, che non si riduce ad una catena, che soddisfa alla condizione $\overline{\beta}$ e tale che tra L e S si può porre un emimorfismo inferiore.

Sussistono, naturalmente, pure i teoremi duali

§ 1 1) Sia L un reticolo ed M' un insieme di elementi in cui sia definita un'operazione univoca binaria che abbia per dominio M' e per

[1]) Per i concetti generali sui reticoli rimandiamo al trattato: *Lattice Theory* di G. Birkhoff (ed. 1948).

codominio un sottoinsieme di M'. Indichiamo col simbolo ρ l' operazione citata.

Diremo che tra L ed M' intercede un emimorfismo superiore se è possibile trovare una trasformazione univoca θ degli elementi di L in quelli di M' che soddisfi alle seguenti condizioni:

a) Ogni elemento a' di M' proviene da almeno un elemento di L.

b) Se a, b sono due qualsiasi elementi di L si abbia $\theta\,(a \vee b) = \theta(a)\rho\theta(b)$.

L' emimorfismo inferiore si definisce per dualità.

Una conseguenza immediata della definizione di emimorfismo superiore [1]) è che se tra L ed M' intercede una tale corrispondenza, l' operazione binaria ρ di M' gode delle tre proprietà:

$$a' \rho\, a' = a' \tag{1}$$
$$a' \rho\, b' = b' \rho\, a' \tag{2}$$
$$(a' \rho\, b')\, \rho\, c' = a' \rho\, (b' \rho\, c'). \tag{3}$$

Infatti si ha rispettivamente:

$$\theta(x) = \theta(x \vee x) = \theta(x) \rho\, \theta(x)$$
$$\theta(x) \rho\, \theta(y) = \theta(x \vee y) = \theta(y \vee x) = \theta(y) \rho\, \theta(x)$$
$$\theta(x) \rho\, [\theta(y) \rho\, \theta(z)] = \theta[x \vee (y \vee z)] = \theta[(x \vee y) \vee z] = [\theta(x) \rho\, \theta(y)] \rho\, \theta(z).$$

Dato che l' operazione binaria ρ di M' soddisfa alle tre proprietà (1), (2), (3), l' insieme M' si può ordinare parzialmente [2]) convenendo di assumere $a' \geq b'$ e solo se $a' \rho\, b' = a'$.

Invero per la (1) abbiamo:

$$a' \qquad a' \tag{4}$$

per ogni elemento a' di M'.

Sia poi $a' \geqq b'$ e $b' \geqq a'$ ossia:

$$a' \rho\, b' \qquad a'$$
$$b' \rho\, a' \qquad b'$$

Per le proprietà (2) abbiamo:

$$a' = b' \quad \text{se} \quad a' \geqq b' \text{ e } b' \geqq a'. \tag{5}$$

Sia infine $a' \geqq b'$, $b' \geqq c'$ ossia $a' \rho\, b' = a'$, $b' \rho\, c' = b'$.

[1]) Per gli emimorfismi inferiori varranno le considerazioni duali.

[2]) Esercizio 1 a pag. 18 in *Lattice Theory* di G. Birkhoff (ed. 1948).

Allora $a' \rho c' = (a' \rho b')\rho c'$ e per la proprietà (3) $(a'\rho b')\rho c' = a'\rho(b'\rho c') = a'\rho b' = a'$ vale a dire da

(6) $$a' \geqq b', b' \geqq c' \text{ segue } a' \geqq c'.$$

La relazione $\geqq$ definita sopra soddisfa pertanto ai tre postulati che definiscono un ordinamento parziale in un insieme di elementi. Fissato in M'' l'ordinamento parziale citato, dimostriamo il

Teorema I: Un emimorfismo superiore è una corrispondenza isotona. Infatti se $a \geqq b$, si ha $a \vee b = a$ e quindi $\theta(a \vee b) = \theta(a) \rho\, \theta(b) = \theta(a)$, per cui $\theta(a) \geqq \theta b$.

Corollario I: Se L è un reticolo dotato di due elementi O ed I godenti rispettivamente della propjietà che O è contenuto in ogni elemento di L ed I contiene ogni elemento di L, anche M' è dotato di due elementi O e I' godenti di analoghe proprietà e si ha:

$$\theta(O) = O' \quad , \quad \theta(I) = I'.$$

Sia a' un qualsivoglia elemento di M'' e consideriamo il sistema $\Sigma_{a'}$ costituito da tutti e soli quegli elementi di L che l'ememorfismo superiore θ porta in a'.

Teorema II: Se $s_1, s_2 \ldots s_t$ sono t elementi di Σ_a, allora l'elemento $s_1 \vee s_2 \ldots \vee s_t$ è pure un elemento di $\Sigma_{a'}$.

Per $t = 2$ si ha $\theta(s_1 \vee s\,) = \theta(s_1)\rho\, 0(s\,) = a' \rho\, a' = a'$.

Per induzione si conclude con la validità del teorema.

Definizione: Diremo dimensione d di un elemento X di L, la massima lunghezza d della catena connessa $X_0 < X_1 < \ldots < X_d$. Chiameremo dimensione di un reticolo L l'estremo superiore dell'insieme N costituito dalle dimensioni degli elementi di L. Se tale estremo superiore è finito, il reticolo si dirà di dimensione finita.

Suppponiame che L sia un reticolo di dimensione finita. Allora si sa dalla teoria dei reticoli [1]) che ogni sottoinsieme M ammette un minimo confine superiore, cioè un elemento che gode della proprietà di contenere ogni elemento di M e di essere a sua volta contenuto in ogni altro elemento di L che contenga tutti gli elementi di M. Dualmente ogni sottoinsieme M di L ammette un massimo confine inferiore. In particolare L ha un I ed uno O e quindi anche M' ha un I' ed uno O'.

Teorema III: Il minimo confine superiore di ogni sistema Σ_a appartiene a Σ_a.

Invero, poichè ogni catena in L ha lunghezza finita si vede immedia-

---

1) G. Birkhoff, *Lattice Theory*, pag 16 (ed. 1948).

tamente che ogni minimo confine superiore di un sottoinsieme M di L si può rappresentare come unione di un numero finito di elementi di M.

Ricordando allora il Teorema II, si conclude con l'asserzione del teorema.

Consideriamo ora i sistemi Σ in L. Essi sono a due a due privi di elementi comuni ed ogni elemento di L appartiene ad uno di essi. Indichiamo con S l'insieme dei minimi confini superiori delle classi Σ. Esso contiene l'elemento I, essendo I minimo confine superiore di ogni sottoinsieme di I che lo contiene.

Poniamo tra gli elementi S ed M' la cerrispondenza $\overline{\theta}$ che si ottiene associando ad ogni elemento a di S l'elemento $\theta\,(a)$.

Si tratta manifestamente di una corrispondenza biunivoca.

Siano poi a e b due elementi di S. L'unione $a \vee b$ apparterrà al sistema $\Sigma_{a'\rho b'}$. Se σ indica il minimo confine superiore di $\Sigma_{a'\rho b'}$ sarà $a \vee b \leq \sigma$.

Introduciamo nell'insieme S, l'operazione binaria $\overline{\vee}$ così definita.

Se a e b sono due elementi di S, $a \overline{\vee} b$ indichi il minimo confine superiore di $\Sigma_{a'\rho b'}$.

$a \overline{\vee} b$ è un elemento di S per la definizione dell'insieme S.

E' facile vedere che valgono le relazioni seguenti:

α.) $\overline{\theta}(a \overline{\vee} b) = \overline{\theta}(a) \rho\, \theta(b)$. Infatti $\overline{\theta}(a \overline{\vee} b) = \theta(a \vee b) = \theta(a) \rho\, \theta(b) = \overline{\theta}(a) \rho\, \overline{\theta}(b)$.

β.) $a \overline{\vee} a = a$

γ.) $a \overline{\vee} b = b \overline{\vee} a$

δ.) $a \overline{\vee} (b \overline{\vee} c) = (a \overline{\vee} b) \overline{\vee} c$.

Quest'ultima si dimostra facilmente nel seguente modo tenendo conto della α.)

$$\overline{\theta}[a \overline{\vee} (b \overline{\vee} c)] = \overline{\theta}(a) \rho\, \overline{\theta}(b \overline{\vee} c) = \overline{\theta}(a) \rho [\overline{\theta}(b) \rho\, \overline{\theta}(c)] = [\theta(a) \rho\, \theta(b)] \rho\, \theta(c) =$$
$$= \overline{\theta}(a \overline{\vee} b) \rho\, \theta(c) = \overline{\theta}[(a \overline{\vee} b) \vee c] = \overline{\theta}[(a \overline{\vee} b) \overline{\vee} c]$$

e data la biunivocità della corrispondenza $\overline{\theta}$ tra S ed M' sarà:

$$a \overline{\vee} (b \overline{\vee} c) = (a \overline{\vee} b) \overline{\vee} c.$$

Osservazione: La α.) ci dice che la corrispondenza biunivoca $\overline{\theta}$ tra S ed M' e un emimorfismo superiore.

Teorema IV: Se $\overline{\theta}(a) < \overline{\theta}(b)$, allora $a < b$.

Invero $\overline{\theta}(a \overline{\vee} b) = \overline{\theta}(b)$ e quindi $a \overline{\vee} b \quad b$; da qui $a \vee b \quad a \overline{\vee} b \quad b$ e poichè d'altra parte $a \vee b \geq b$, è $a \vee b = b$ e quindi $a < b$.

Corollario II: La dimensione degli elementi di M' non può superare quella degli elementi di L.

Studiamo adesso l'elemento $a \wedge b$ con a e b elementi di S.

L' elemento $a \wedge b$ appartenga alla classe $\Sigma_{u'}$ della quale u sia il minimo confine superiore. Si avrà allora la relazione $a \wedge b \leqq u$. (7)

Poichè

$$a \geqq a \wedge b \quad , \quad b \geqq a \wedge b$$

sarà per il Teorema I

$$\theta(a) \geqq \theta(u) \quad , \quad \theta(b) \geqq \theta(u).$$

Abbiamo allora

$$\begin{cases} \theta(u \vee a) = \theta(u) \rho \, \theta(a) = \theta(a) \\ \theta(u \vee b) = \theta(u) \rho \, \theta(b) = \theta(b) \end{cases}$$

e quindi, essendo a e b in S

$$\begin{array}{lclll} a \vee u \leqq a & \text{ossia} & a \vee u = a & u \leqq a & \\ b \vee u \leqq b & & b \vee u = b & u \leqq b & \text{da cui} \quad u \leqq a \wedge b \qquad (7)^{\text{bis}} \end{array}$$

Confrontando la (7) con la $(7)^{\text{bis}}$, concludiamo con l' uguaglianza

$$u = a \wedge b$$

Pertanto abbiamo il seguente

Teorema V: L' intersezione entro L di due elementi di S è ancora un elemento di S.

Teorema VI: Il sistema di elementi S forma un reticolo di fronte alle operazioni $\overline{\vee}$ e $\wedge$.

Infatti sussistono intanto le relazioni:

$$a \overline{\vee} a = a \qquad a \wedge a = a$$
$$a \overline{\vee} b = b \overline{\vee} a \qquad a \wedge b = b \wedge a$$
$$a \overline{\vee} (b \overline{\vee} c) = (a \overline{\vee} b) \overline{\vee} c \quad , \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c.$$

Restano da verificare le due relazioni

$$a \wedge (a \overline{\vee} b) = a \qquad\qquad a \vee (a \wedge b) = a$$

Ora la prima segue dal fatto che $a \overline{\vee} b \geqq a$ e la seconda dal fatto che a sta in S e $a \wedge b \leqq a$.

Indichiamo con N' un insieme di elementi in cui sia definita un' operazione binaria univoca ρ.

Dimostriamo il seguente

Teorema VII: Se T è un reticolo in emi-isomorfismo superiore θ con N', allora N' è pure un reticolo e lo emi-isomorfismo superiore è un isomorfismo. [1])

Presi due elementi a', b' di N', per le ipotesi fatte, esistono in T due elementi a, b univocamente determinati per cui

$$\theta(a) = a' \,,\; \theta(b) = b'$$

Definiamo per $a' \rho' b'$ l'elemento $\theta(a \wedge b)$, $a' \rho' b' = \theta(a \wedge b)$

Quest' ultimo è ovviamente univocamente determinato da a', b', vale a dire l'operazione così definita in N' è una operazione univoca.

Dalla definizione di essa si deduce la validità delle tre relazioni:

$$a' \rho' a' = a'$$
$$a' \rho' b' = b' \rho' a'$$
$$a' \rho' (b' \rho' c') = (a' \rho' b') \rho' c'.$$

Il verificarsi delle relazioni

$$a' \rho' a' = a'$$
$$a' \rho b' = b' \rho a'$$
$$a' \rho (b' \rho c') = (a' \rho b') \rho c'$$

fu già dimostrato all'inizio di questo scritto.

Restano da provare le relazioni:

$$a' \rho (a' \rho' b') = a' \qquad a' \rho' (a' \rho b') = a'$$

Ora $a' \rho' b' = \theta(a \wedge b)$ e quindi $a' \rho (a' \rho' b') = \theta[a \vee (a \wedge b)] = \theta(a) = a'$.

Con un ragionamento simile si vede che $a' \rho' (a' \rho b') = a'$.

Pertanto le due operazioni binarie ρ, ρ' soddisfano alle 8 relazioni formali che definiscono un reticolo e quindi N' è un reticolo.

L'isomorfismo segue dal fatto che $\theta(a \vee b) = \theta(a) \rho \theta(b)$ e che per definizione $a' \rho' b' = \theta(a \wedge b)$.

Teorema VIII: L'insieme parzialmente ordinato M' è un reticolo con $\vee = \rho$ ed S è isomorfo ad M'.

Invero ciò segue dai teoremi VI, VII e dall' osservazione I.

Riassumendo abbiamo: Se L è un reticolo a dimensione finita in emimorfismo superiore con un insieme M' in cui sia definita una operazione univoca binaria ρ, M' è un reticolo in cui l'operazione di unione coincide con ρ.

---

[1]) Conseguenza dell' esercizio 7 (a) pag. 22 di *Lattice Theory* di G. Birkhoff.

Inoltre in L esiste un sottoinsieme S che gode delle seguenti proprietà:

α') Detti a, b due elementi di S, pure $a \wedge b$ appartiene ad S.

β') S contiene l'elemento I di L.

γ') S è un reticolo in cui l'operazione d'intersezione coincide con quella di L.

δ') Il reticolo S è isomorfo al reticolo M', l'isomorfismo ottenendosi facendo corrispondere a ciascun elemento a' di M' il minimo confine superiore degli elementi di L cui corrisponde a' nell'emimorfismo superiore tra L e M'.

2) Supponino ora che L sia un reticolo a dimensione finita e che S sia un sottoinsieme di elementi di L godente delle due proprietà α') e β').

Scelto un elemento a qualsiasi di L, indichiamo con Δ_a il sistema di elementi di S che contengono a. Tale sistema non è vuoto per la β').

Poichè le catene in L sono tutte di lunghezza finita, Δ_a ha un massimo confine inferiore, che è rappresentabile come intersezione di un numero finito di elementi di Δ_a. In virtù dell'ipotesi α'), tale massimo confine inferiore appartiene pure a Δ_a. Esso contiene a ed è contenuto in ogni elemento di Δ_a.

Consideriamo ora la corrispondenza univoca τ che associa ad ogni elemento a di L il massimo confine inferiore di Δ_a.

Tale corrispondenza τ trasforma evidentemente il reticolo L in tutto il sistema S in quanto se a sta in S, è $\tau(a) = a$.

Introduciamo in S la seguente operazione univoca binaria $\overline{\vee}$;

Se a e b sono due elementi di S, sia $a \overline{\vee} b = \tau(a \vee b)$.

Teorema IX: La corrispondenza τ e un emimorfismo superiore tra L e S nel senso che $\tau(a \vee b) = \tau(a) \overline{\vee} \tau(b)$.

Perciò basterà far vedere che $\tau(a) \overline{\vee} (b)$ è il massimo confine inferiore di $\Delta_{a \vee b}$. Dalla definizione della corrispondenza τ, segue intanto che τ è una corrispondenza isotona e che $a \leqq \tau(a)$. Ma allora $(a \vee b) \leqq \tau\, a) \vee \tau(b)$ e $\tau(a \vee b) \leqq \tau(\tau(a) \vee \tau(b)) = \tau(a) \overline{\vee} \tau(b)$, ossia $\tau(a) \overline{\vee} \tau(b)$ appartiene a $\Delta_{a \vee b}$.

Sia h un elemento di $\Delta_{a \vee b}$. Poichè h contiene $\tau(a \vee b)$, h contiene $a \vee b$ e perciò a e b e quindi pure $\tau(a)$ e $\tau(b)$ e quindi $\tau(a) \vee \tau(b)$ ossia h appartiene a $\Delta_{\tau(a) \vee \tau(b)}$ e quindi h contiene $\tau[\tau(a) \vee \tau(b)] = \tau(a) \overline{\vee} \tau(b)$.

Ma allora ogni elemento di $\Delta_{a \vee b}$ contiene l'elemento $\tau(a) \vee \tau(b)$ che pure sta in $\Delta_{a \vee b}$; vale a dire $\tau(a) \overline{\vee} \tau(b)$ è il massimo confine inferiore di $\Delta_{a \vee b}$, cioè $\tau(a \vee b) = \tau(a) \overline{\vee} \tau(b)$. La trasformazione τ di L su S è pertanto un emimorfismo superiore.

Il teorema VIII ci permette di dire che S è un reticolo dove l'operazione di intersezione $\overline{\wedge}$ è definita da $a \overline{\wedge} b = \tau(a \wedge b)$. Ma $\tau(a \wedge b) = a \wedge b$, essendo per ipotesi $a \wedge b$ in S e quindi $\overline{\wedge} = \wedge$ ossia S è un reticolo in cui l'operazione d'intersezione coincide con quella di L.

Conclusione: Condizione necessaria e sufficiente affinchè un reticolo L a dimensione finita ammetta un emimorfismo superiore (inferiore) è

che esso contenga un sottoinsieme S che soddisfi alle due condizioni:

α') Se a e b sono due elementi di S, pure $a \wedge b$ ($a \vee b$) appartiene ad S.

β') S contiene l'elemento I (O) di L.

§ 2 1) Sia L un reticolo soddisfacente alla seguente condizione:

α.) Ogni catena in L è finita.

Per il reticolo L sussiste allora il seguente

Tearema [1]) *I*: Ogni elemento di L si può rappresentare come unione di un numero finito di elementi « irriducibili [2]) rispetto l'unione ».

Invero il teorema è vero se la dimensione di un elemento di L è 1. Pertanto supporremo vero il teorema per un elemento di dimensione minore o uguale ad $m-1$, e faremo vedere che il teorema è pur vero per un elemento di dimensiane m.

Preso un elemento di L qualsiasi, per la condizione $\bar{\alpha}$ su L, a avrà una dimensione finita m. Se a non è u-irriducibile, a si potrà rappresentare come unione di due elementi x, y contenuti in a diversi da a.

Pertanto la dimensione di x e quella di y non superano il valore $m-1$. Ma per l'ipotesi d'induzione fatta, gli elementi x e y si possono rappresentare come unione di un numero finito di elementi u-irriducibili e quindi anche a. Data la genericità di a in L, il teorema risulta dimostrato.

Supponiamo ora che il reticole L soddisfi oltre alla condizione $\bar{\alpha}$, anche alla seguente.

β) Se a è un elemento di L diverso dall'elemento O e non un atomo [3]), a copra almeno due elementi distinti di L.

Nel reticolo L gli unici elementi u-irriducibili sono allora gli atomi e lo O. Dal teorema I segue che ogni elemento di L diverso da O può rappresentarsi come unione di atomi in numero finito.

Viceversa se ciò avviene in un reticolo L a dimensione finita, L soddisfa alla condizione $\bar{\beta}$. Per cui si ha:

Teorema II: Condizione necessaria e sufficiente affinchè un reticolo di lunghezza finita goda della proprietà $\bar{\beta}$, è che ogni elemento di L diverso dallo O sia rappresentabile come unione di atomi.

Teorema III: Se L è in emimorfismo superiore τ con un reticolo M', ogni elemento u-irriducibile di M' è corrispondente di almeno un elemento u-irriducibile di L.

Infatti sia a' un elemento u-irriducibile di M' che non provenga da alcun elemento u-irriducibile di L. Sia a un elemento di L per cui $\tau(a) = a'$.

---

[1]) Birkhoff, *Op. cit.*, pag. 20, es. 4.

[2]) Un elemento a di un reticolo dicesi " irriducibile rispetto l'unione " o semplicemente u-irriducibile se l'uguaglianza $a = x \vee y$ implica $x = a$ o $y = a$.

[3]) Dicesi atomo un elemento di dimensione 1 in L.

L'elemento a ammetterà una rappresentazione del tipo: $a=x_{i_1} \vee x_{i_2} \dots \vee x_{it}$ con x_{ij} elemento u-irriducibile di L.

Pertanto $\tau(a) = x'_{i_1} \vee x'_{i_2} \dots \vee x'_{it}$. Ma a' è un elemento u-irriducibile di M' e quindi necessariamente uno degli elementi x'_{ij} coincide con a'. Onde a' proviene da uno degli elementi $x_{i_1}, \dots x_{it}$ cioè da un elemento u-irriducibile, contro l'ipotesi assurda.

Corollario I: Se L è un reticolo in emimorfismo superiore con un reticolo M', la potenza dell'insieme degli elementi u-irriducibili di M' non può superare quella degli elementi u-irriducibili di L.

Ricordiamo ora il seguente teorema di DILWORTH [1]): Se L è un reticolo a catene di lunghezza finita, condizione necessaria e sufficiente affinchè una rappresentazione non accorciabile [2]) di un elemento mediante unione di elementi u-irriducibili sia unica, è che L sia semimodulare e tale che ogni suo sottoreticolo modulare sia distributivo.

Teorema IV: Se L è un reticolo distributivo soddisfacente alle condizioni $\overline{\alpha}$ e $\overline{\beta}$, ed M' un reticolo pure soddisfacente alle condizioni $\overline{\alpha}$ e β e la potenza dell'insieme degli atomi di M' non supera quella di L, L è in emimorfismo superiore con M'.

Consideriamo una trasformazione univoca τ degli atomi di L in quelli di M'.

Un generico elemento di L ammetterà, in virtù del teorema di DILWORTH, una ed una sola rappresentazione non accorciabile del tipo $a=x_{i_1} \vee x_{i_2} \dots \vee x_{i_t}$ (8) dove gli x_i sono atomi di L.

Tra L e M' definiamo la seguente corrispondenza θ.

$$\theta(a) = \tau(x_{i_1}) \vee \tau(x_{i_2}) \dots \vee \tau(x_{i_t}).$$

In tal modo ad ogni elemento di L corrisponde un ben determinato elemento di M' data la univocità della rappresentazione (8) e della corrispondenza τ. Scelto un altro elemento b di L si avrà:

$$b = x_{j_1} \vee x_{j_2} \dots \vee x_{js} \quad (9) \qquad \text{e} \qquad \theta(b) = \tau(x_{j_1}) \vee \tau(x_{j_2}) \dots \vee \tau(x_{js}).$$

$$(10) \quad a \vee b = (x_{i_1} \vee \dots \vee x_{i_t}) \vee (x_{j_1} \vee \dots \vee x_{js}) = x_{i_1} \vee x_{i_2} \dots \vee x_{i_t} \vee x_{jv_1} \vee x_{jv_2} \dots \vee x_{jvn}$$

dove il terzo membro della (10) si è ottenuto dal secondo membro sopprimendo quegli atomi della (9) che figurano pure nella (8), cioè eliminando

[1]) DILWORTH, *Lattices with unique irreducibile decompositions.* Annals of Math., 41 (1940), pp. 771-777.

[2]) Una rappresentazione di un elemento a di un reticolo L mediante l'unione di più elementi di L si dice non accorciabile qualora la soppressione di uno qualsiasi degli elementi diversi dallo O che intervengono nella rappresentazione di a da luogo ad un elemento contenuto propriamente in a.

le ripetizioni. Dimostriamo che la (10) è una rappresentazione non accorciabile. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che nella (10) si possa sopprimere, per fissar le idee, l' elemento x_{i_1}. Si avrebbe $a \vee b = x_{i_2} \vee x_{i_3} \ldots \vee x_{jvn}$ (11) ossia l' elemento x_{i_1} dovrebbe essere contenuto in $a \vee b$.

Ora ciò è impossibile; invero poichè L è distributivo, otteniamo

$$(x_{i_2} \vee \ldots x_{ivn}) \wedge x_{i_1} = (x_{i2} \wedge x_{i_1}) \vee \ldots \vee (x_{jvn} \wedge x_{i_1}) = 0 \vee 0 \ldots \vee 0 = 0.$$

Quindi la (10) è, come volevasi, una rappresentazione non accorciabile e quindi unica dell' elemento $a \vee b$.

Il corrispondente di $a \vee b$ in M' sarà allora

$$\theta(a \vee b) = \tau(x_1) \vee \tau(x\ ) \ldots \vee \tau(x_{ivn}) = [\tau(x_{i1}) \vee \ldots \vee \tau(x_{it})] \vee [\tau x_{j1}) \vee \ldots \vee \tau(x_{js})] = \theta(a) \vee \theta(b)$$

Inoltre la trasfermazione θ trasforma L su tutto M'.

Invero in M' ogni elemento a è rappresentabile mediante l' unione di atomi distinti $a' = x_1' \vee x\ ' \ldots \vee x'_t$. Se diciamo x_1, $x_2, \ldots, x_t$, t atomi di L tale che $\tau(x_i) = x_i'$ essi saranno tutti distinti data la univocità della corrispondenza τ. Ma allora $a = x_1 \vee x \ldots \vee x_t$ da una rappresentazione non accorciabile di a e quindi $\theta(a)$ risulta proprio a'.

Corollario II: Condizione necessaria e sufficiente affinchè un reticolo distributivo L soddisfacente alle condizioni $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ sia un emimorfismo superiore con un reticolo M' soddisfaciente alle condizioni $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$, è che il numero degli atomi di M' non superi quello di L.

2) Consideriamo un reticolo soddisfacente alle condizioni $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$.

Abbiamo già visto che un tale reticolo è generabile mediante i suoi atomi; supponiamo inoltre che la potenza dell' insieme di detti atomi (e quindi anche la potenza di L) non superi quella dell' insieme numerabile).

Consideriamo tra O e I una catena connessa:

$$(12) \qquad 0 = y_0 < y_1 < y \ldots < y_l = I$$

La dimensione di L è allora manifestamente l.

Consideriamo le rappresentazioni minime degli elementi y_1, y, $\ldots y_l$.

Definiamo rappresentazione minima di un elemento a di L, la seguente rappresentazione. Numerati gli atomi in L, consideriamo tutte le possibili rappresentazioni di a mediante atomi. Fra queste scegliamo quelle in cui interviene il numero minimo di atomi. Tra quest' ultime scegliamo quella in cui la somma degli indici degli atomi è minima. Tale rappresentazione di a, univocamente determinata in L, chiameremo la rappresentazione minima di a.

Indichiamo con M l' insieme degli atomi che intervengano nelle rappresentazioni minime degli elementi y_1, $y_2, \ldots y_l$. Esso sarà costituito da un numero finito di atomi.

Siano $y_m = x_{v_1} \vee x_{v_2} \dots x_{v_t}$ (13) e $y_{m-1} = x_{r_1} \vee x_{r_2} \dots x_{r_s}$ (13)bis le rappresentazioni minime di y_m e di y_{m-1}.

Poichè $y_m > y_{m-1}$ avremo $y_m = y_m \vee y_{m-1} = x_{v_1} \vee x_{v_2} \dots \vee x_{v_t} \vee x_{r_1} \vee x_{r_2} \dots \vee x_{r_s}$.

Date queste rappresentazioni di y_m togliamo quelli t tra gli atomi x_{v_1}, $x_{v_2} \dots x_{v_r}$ che figurano tra gli atomi $x_{r_1}, x_{r_2}, \dots x_{r_s}$. Si otterrà $y_m = x_r \vee \dots \vee x_{r_s} \vee x_{f_1} \vee x_{f_2} \dots \vee x_{f_k}$ (14) dove $x_{f_1}, x_{f_2}, \dots x_{f_k}$ sono necessariamente atomi della rappresentazione (13). Sarà certamente $k \geq 1$ perchè $y_m > y_{m-1}$. Se togliamo ora nella (14) l' atomo x_{fk}, otteniamo un elemento b' contenuto propriamente in y_m e che contiene y_{m-1}. Ma y_m copre y_{m-1} e quindi $y_{m-1} = b'$. Poichè $b' \vee x_{fk} = y_m$, abbiamo $y_{m-1} \vee x_{fk} = y_m$. Concludiamo che preso un elemento qualsiasi y_i della catena (12) non coincidente con I, si può sempre trovare nell' insieme M un elemento x_m per cui vale la relazione $y_{i+1} = y_i \vee x_m$ (15).

Da questa conclusione si deduce il

Teorema V: Dall' insieme M si possono estrarre l elementi (atomi) che numerati convenientemente soddisfano alle relazioni:

$$y_1 = x_1 \quad , \quad y = x_1 \vee x, \dots y_l = x_1 \vee x, \vee \dots \vee x_l$$

e queste rappresentazioni non sono accorciabili.

Invero il teorema è vero per $y = x_1 \vee x$, ma allora supposto vero per y_i $(i = 2, 3, \dots, l-1)$ è vero in virtù della (15) anche per y_{i+1}.

Indichiamo con N l' insieme $O, x_1, x, \dots, x_l$.

Sia poi S il sistema di elementi di L che si ottiene combinando tra di loro in tutti i modi possibili mediante l'operazione di unione $\vee$ gli elementi di N.

Scelti t atomi distinti dall' insieme N, con $t \leq l$, $x_{v_1}, x_{v_2}, \dots x_{v_t}$, consideriamo l' elemento a di S dato da $a = x_{v_1} \vee x_{v_2} \vee \dots \vee x_{v_t}$ (16).

Per la commutività ed associatività della operazione di unione $\vee$, potremo supporre $v_1 < v_2 < \dots < v_t$.

Teorema VI: La rappresentazione (16) di a non è accorciabile.

Consideriamo infatti tutti gli atomi di N d' indice minore di v_t e distinti da quelli che figurano nella (15), e aggiungiamoli in unione ad a; otterremo così l' elemento $y_{v_t} > a$. Ma la data rappresentazione di y_{v_t} non è accorciabile, quindi tanto meno quella di a, avendosi $a \leq y_{v_t}$.

Corollario III: La dimensione d di un elemento a di S coincide col numero degli atomi distinti che intervengono nella rappresentazione.

Invero sia $s < l$ tale numero. Se aggiungiamo un atomo qualsiasi di N che già non vi figura nella rappresentazione di a, la dimensione dell' elemento aumenta in virtù del teorema VI. Pertanto sarà $s \leq d$. Supponiamo $s < d$. L'aggiunta degli $l-s$ atomi mancanti nella rappresentazione di a dà luogo ad un elemento b di dimensione d' per cui $d' \geq d + l - s > s + (l-s) = l$. D'altra parte questo numero deve coincidere con l essendo ovviamente $b = 1$. Quindi $d' = l$ e pertanto $d + l - s = d$ ossia $d = s$, contro l' ipotesi assurda.

Corollario IV: Se a è un elemento di S di rappresentazione non accorciabile $a = x_{v_1} \vee x_{v_2} \ldots \vee x_{v_2}$ (17), se x_i è un atomo di N che non figura tra quelli della (17), la dimensione dell' elemento $a \vee x_i$ è $r+1$.

Corollario V: Due elementi di S coincidono se e soltanto se le loro rappresentazioni non accorciabili coincidono elemento per elemento.

Dimostrazione: Abbiansi due rappresentazioni di a in S non accorciabili

$$a = x_{m_1} \vee x_{m_2} \ldots \vee x_{m_t} = x_{n_1} \vee x_{n_2} \ldots \vee x_{n_s} .$$

Pel corollario III sarà intanto $s = t$.

Sia poi x_{n_i} un atomo della seconda rappresentazione non compreso fra gli elementi $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots x_{m_t}$. x_{n_i} dev' essere però contenuto in a e quindi $a \vee x_{n_i} = a$. Questa eguaglianza è però in contrasto col corollario IV, secondo il quale la dimensione di $a \vee x_{n_i}$ è $s+1$ e non s.

Notiamo adesso che dalla definizione del sistema S segue che presi due elementi a e b in S, l' unione $a \vee b$ sta pure in S, ed S contiene anche lo elemento O e quindi due elementi di S contengono sempre almeno uno stesso elemento di S.

In virtù della conclusione raggiunta al § 1, concludiamo che tra L e S si può porre un emimorfismo inferiore θ. S risulta un reticolo in cui l' operazione di unione $\vee$ coincide con quella di L mentre l'operazione d'intersezione $\underline{\wedge}$ in S resta definita assumando per $a \underline{\wedge} b$ il massimo elemento di S contenuto in $a \wedge b$. L' elemento $a \underline{\wedge} b$ ammetterà una rappresentazione non accorciabile del tipo $a \underline{\wedge} b = z_1 \vee \ldots \vee z_k$, con z_i elemento di N, dove per $k=0$ conveniamo di porre $z_0 = 0$. Dai corollari IV e V segue che gli elementi $z_1, z_2, \ldots z_k$ non sono che gli elementi di N comuni nelle rappresentazioni non accorciabili di a e b. Il reticolo S è allora addirittura distributivo di lunghezza l.

Invero le operazioni di unione e intersezione del reticolo S si riducono alle operazioni di somma e prodotto nel senso della teoria degli insiemi, sugli insiemi di elementi di N che intervengono nelle rappresentazioni non accorciabili degli elementi di S in S.

Conclusione: Se L è un reticolo di lunghezza finita l il cui ordine non supera la potenza del numerabile, godente della proprietà che ogni elemento di L della dimensione ≥ 2 copre almeno due elementi distinti, esiste sempre un reticolo distributivo S di lunghezza l che non riducesi ad una catena, che gode della stessa proprietà di L e tale che tra L e S si può porre un emimorfismo inferiore.

Le aste sottili pressoinflesse in regime viscoso

Nota del dott. **Vincenzo Franciosi,** *presentata dal socio* **A. Galli**

(Adunanza del dì 1 marzo 1952)

Sunto. — Premesso un cenno sul comportamento delle strutture a caratteristiche ereditarie funzioni del posto, già dall' Autore studiate in una precedente nota, ed introdotta la funzione di Green « corretta », si affronta il problema del comportamento statico di un' asta sottile presso-inflessa a caratteristiche ereditarie variabili con l' ascissa. Si perviene così, per la determinazione dei coefficienti dello sviluppo della deformata in serie di autofunzioni, ad un sistema di equazioni differenziali a coefficienti variabili; il sistema si riduce ad equazioni in una sola incognita non appena le caratteristiche ereditarie diventano costanti con l' ascissa.

1) *Premesse.*

La viscosità non può influenzare i moltiplicatori critici relativi ad una determinata struttura sottile; entra invece in gioco a modificare l' assetto statico determinato dalla coesistenza di carichi trasversali ed assiali nelle strutture in cui non possano trascurarsi gli sforzi supplementari indotti dalle deformazioni. Il problema, per quanto riguarda l' asta sottile a nucleo ereditario costante con l' ascissa, è stato già risolto dal Krall [1]) utilizzando la teoria delle equazioni integrali.

L' autore é pervenuto alla espressione delle rotazioni, e quindi degli abbassamenti e momenti, sotto forma di serie trigonometrica a coefficienti funzioni del tempo. Ognuno di questi ultimi è fornito da una equazione differenziale del primo ordine, ottenuta eguagliando i coefficienti delle autofunzioni del medesimo ordine nell' equazione generale istituita dallo stesso Krall per le aste pressoinflesse in regime viscoso.

Si vuole ora trattare lo stesso argomento relativamente alle aste costituite con materiali aventi nucleo ereditario variabile con l' ascissa. La via seguita è anche qui quella delle equazioni integrali. Si giungerà così all' espressione delle rotazioni sotto forma di serie di Fourier a coefficienti funzioni del tempo: questi però, non più ricavabili da singole equazioni differenziali, saranno forniti dall' integrale generale di un sistema differenziale ordinario del primo ordine, di rango pari al numero dei coefficienti

---

[1]) G. Krall, *Statica dei mezzi elastici viscosi e sue applicazioni,* Rend. Acc. Lincei, Febb. 1947, pag. 372.

che si desidera conoscere. Per nuclei poco variati ci si può limitare ad una sola equazione ottenendo così, con buona approssimazione, il primo termine della serie.

2) *Comportamento delle strutture con caratteristiche ereditarie funzioni del posto.*

Se il nucleo ereditario varia lungo la struttura, lo stato tensionale in un sistema iperstatico a vincoli rigidi soggetto a carichi esterni non è più invariante rispetto alla viscosità: infatti le deformazioni viscose non sono più, punto per punto, proporzionali alle tensioni, e cioè alle deformazioni elastiche, e quindi non sono più, in genere, tali da rispettare i vincoli, in corrispondenza dei quali sorgono delle reazioni supplementari. Così pure non sono più invarianti rispetto alla viscosità le deformazioni di un sistema iperstatico soggetto a sole distorsioni.

Continua a valere però il principio di sovrapposizione degli effetti, dipendentemente dalla linearità delle relazioni tra le componenti di tensione e di deformazione, ferma restando l'ipotesi che gli spostamenti siano così piccoli da poter trascurare le variazioni da essi indotte nelle caratteristiche dello sforzo.

In virtù di tale principio, per una trave m volte iperstatica e soggetta ad n carichi concentrati F, le m equazioni di Maxwell in corrispondenza dei vincoli sovrabbondanti si scrivono (per $i = 1, 2, \ldots m$)

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad \Delta_i(t) = & \sum_1^n \left[k_{ih} F_h(t) + \int_0^L \int_0^t \frac{m_i(x)\, m_h(x)}{EI} F_h(\tau)\, \Phi(\tau, x)\, d\tau\, dx \right] + \\
& + \sum_1^m \left[k_{ij} X_j(t) + \int_0^L \int_0^t \frac{m_i(x)\, m_j(x)}{EI} X_j(\tau)\, \Phi(\tau, x)\, d\tau\, dx \right]
\end{aligned}
$$

dove $\Delta_i\,(t)$ è l'eventuale cedimento del vincolo i.esimo, k_{ih} il generico coefficiente di influenza, $m_h\,(x)$ il momento flettente prodotto lungo la struttura da un carico unitario agente all'ascissa h, X_j la reazione del vincolo j.esimo, e$\Phi\,(\tau, x)$ il nucleo ereditario.

Se il nucleo $\Phi\,(\tau, x)$ si specializza come segue

$$
(2) \qquad \Phi(\tau, x) = \varphi(\tau)\, f(x)
$$

il sistema (1) diviene

$$\Delta_i(t) = \sum_{1}^{n}{}_h \left[k_{ih}\, F_h(t) + k'_{ih} \int_0^t F_h(\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau\right] + \sum_{1}^{m}{}_j \left[k_{ij} X_j(t) + k'_{ij} \int_0^t X_j(\tau)\, \varphi(\tau) d\tau\right] \tag{3}$$

dove k'_{ih} (coefficiente d' influenza corretto) è fornito da

$$k'_{ih} = \int_0^L f(x) \frac{m_i(x)\, m_h(x)}{EI} dx. \tag{4}$$

Per carichi distribuiti $p(x, t)$ la (3) si modifica nella

$$\begin{aligned} \Delta_i(t) &= \int_0^L p(\xi, t)\, G(x_i, \xi)\, d\xi + \int_0^L G'(x_i, \xi) \int_0^t p(\xi, \tau)\, \varphi(\tau) d\tau\, d\xi + \\ &+ \sum_{1}^{m}{}_j k_{ij}\, X_j(t) + \sum_{1}^{m}{}_j k'_{ij} \int_0^t X_j(\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{5}$$

dove $G(x, \xi)$ è la normale funzione di Green, e $G'(x, \xi)$ la stessa corretta, fornita da

$$G'(x, \xi) = \int_0^L f(z) \frac{m(x, z)\, m(\xi, z)}{EI} dz. \tag{6}$$

3) *Il problema dell' asta sottile pressoinflessa realizzata con materiale a caratteristiche ereditarie funzioni del posto*

Un' asta sottile sia sottoposta ad uno sforzo normale $\lambda\, n(\xi)$ dove λ è un moltiplicatore avente le dimensioni di una forza, e ad un sistema di carichi trasversali $p(\xi)$. L' equazione generale del Krall, se il nucleo è particolarizzabile come in (2), si trasforma nell' altra

$$\begin{aligned} \omega(x, t) &= \omega_0(x, t) + \lambda \int_0^L n(\xi)\, \Omega(x, \xi)\, \omega(\xi, t) d\xi + \int_0^t \varphi(\tau)\, \omega'_0(x, \tau)\, d\tau + \\ &+ \lambda \int_0^t \varphi(\tau) \int_0^L n(\xi)\, \Omega'(x, \xi)\, \omega(\xi, \tau) d\xi\, d\tau \end{aligned} \tag{7}$$

dove ω è la funzione incognita « rotazione », e

$$\omega_0=\int_0^L \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} p(\xi)d\xi\,; \quad \omega_0'=\int_0^L \frac{\partial G'(x,\xi)}{\partial x} p(\xi)d\xi\,; \quad \Omega'(x,\xi)=\frac{\partial^2 G'(x,\xi)}{\partial x\,\partial \xi}.$$

Derivando la (7) rispetto a t, e ponendo $\frac{\partial}{\partial t}=(\dot{})$, si perviene alla

$$\dot{\omega}=\dot{\omega}_0+\lambda\int_0^L n\Omega\,\dot{\omega}\,d\xi+\varphi(t)\omega_0'+\lambda\varphi(t)\int_0^L n\Omega'\omega\,d\xi. \tag{8}$$

Si consideri adesso l' equazione omogenea

$$\omega(x)=\lambda\int_0^L n(\xi)\,\Omega(x,\xi)\,\omega(\xi)\,d\xi \tag{9}$$

di cui siano λ_ρ ed $\omega_\rho(x)$ l' autovalore e l' autofunzione di ordine ρ. Essendo rispettate le condizioni di Hilbert, si può sviluppare sia ω_0 che ω'_0 in serie di autofunzioni ω_ρ ottenendo

$$\omega_0=\Sigma_\rho\,\gamma_\rho\,\omega_\rho \quad ; \quad \omega'_0=\Sigma_\rho\,\gamma'_\rho\,\omega_\rho. \tag{10}$$

I coefficienti γ_ρ e γ'_ρ sono ottenibili alla Fourier:

$$\gamma_\rho=\int_0^L n\,\omega_0\,\omega_\rho\,dx \quad ; \quad \gamma_\rho'=\int_0^L n\,\omega_0'\,\omega_\rho\,dx$$

Si ponga anche l' incognita ω sottoforma di serie di autofunzioni ω_ρ

$$\omega=\Sigma_\rho\,A_\rho(t)\,\omega_\rho. \tag{11}$$

Sostituendo nella (8) i valori (10) e (11), e tenendo conto della (9), si ottiene

$$\begin{aligned}\sum_\rho \dot{A}_\rho\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_\rho}\right)\omega_\rho=\sum_\rho\left[\dot{\gamma}_\rho+\gamma_\rho'\varphi(t)\right]\omega_\rho+\\ +\varphi(t)\sum_\rho A_\rho\lambda\int_0^L n(\xi)\,\Omega'(x,\xi)\,\omega_\rho(\xi)\,d\xi.\end{aligned} \tag{12}$$

Si sviluppi $\Omega'(x, \xi)$ in serie doppia di autofunzioni ω_ρ

(13) $$\Omega'(x, \xi) = \Sigma_{\mu\nu} B_{\mu\nu}\, \omega_\mu(x)\, \omega_\nu(\xi)$$

dove i coefficienti $B_{\mu\nu}$ calcolati alla FOURIER, sono dati da

$$B_{\mu\nu} = \int^{L} \int_0^{L} n(\xi)\, \Omega'(x, \xi)\, \omega_\mu(x)\, \omega_\nu(\xi)\, dx\, d\,\xi.$$

Può quindi scriversi

$$\int_0^{L} n(\xi)\, \Omega'(x, \xi)\, \omega_\rho(\xi)\, d\xi = \sum_{\mu\nu} B_{\mu\nu}\, \omega_\mu(x) \int_0^{L} n(\xi)\, \omega_\rho(\xi)\, \omega_\nu(\xi)\, d\xi = \sum_\mu B_{\mu\rho}\, \omega_\mu(x).$$

La (12) diviene cioè

$$\sum_\rho \dot{A}_\rho \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\rho}\right) \omega_\rho = \lambda\varphi(t) \sum_\rho \sum_\mu A_\rho B_{\mu\rho}\, \omega_\mu + \sum_\rho \left[\dot{\gamma}_\rho + \gamma'_\rho\, \varphi(t)\right] \omega_\rho$$

da cui, eguagliando i coefficienti delle autofunzioni dello stesso ordine, si trae

(14) $$\dot{A}_\rho \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\rho}\right) = \lambda\varphi(t) \sum_\mu A_\mu B_{\rho\mu} + \dot{\gamma}_\rho + \gamma'_\rho\, \varphi(t).$$

Per ρ e μ variabili da zero ad m, le (14) costituiscono un sistema di m equazioni differenziali ordinarie del primo ordine nelle m incognite $A_1(t)$, $A_2(t), \ldots A_m(t)$, già scritto sotto forma normale.

Se $\varphi(t) = e^{-t}$ e $\dot{\gamma} = 0$, è agevole trasformare il sistema (24) in un altro a coefficienti costanti. Il (14) infatti, in tale ipotesi, si scriverebbe, indicando con K_ρ il rapporto $\frac{\lambda}{\lambda_\rho}$,

(15) $$e^t \dot{A}_\rho = \frac{\gamma'_\sigma}{1 - k_\rho} \left[\sum_\mu B_{\rho\mu} A_\mu + \frac{\gamma'_\rho}{1 - k_\rho}\right] \qquad (\mu, \rho = 1, 2, \ldots, m).$$

Ponendo

$$\tau = -e^{-t} \quad ; \quad \psi_\rho(\tau) = A_\rho[-\log(-\tau)] \qquad (\tau < 0)$$

da cui

$$\frac{d\psi_\rho}{d\tau} = \frac{dA_\rho}{dt} e^t$$

il (15) si trasforma nel

$$\frac{d\psi_\rho}{d\tau}=\frac{\lambda}{1-k_\rho}\left[\sum_\mu B_{\rho\mu}\psi_\mu+\frac{\gamma'_\rho}{1-k_\rho}\right] \qquad (\mu,\rho=1,2\ldots,m). \tag{16}$$

L'integrale generale del sistema omogeneo associato al (16) è

$$\psi_\rho(\tau)=\Sigma_k C_k \gamma_{k_\rho} e^{\alpha_k\tau} \qquad (k,\rho=1,2,\ldots,m)$$

dove α_k sono le radici dell'equazione caratteristica, e γ_{k_ρ} le soluzioni del noto sistema di equazioni lineari. E' quindi ancora

$$A_\rho(t)=\Sigma_k C_k \gamma_{k_\rho} e^{-\alpha_k e^{-t}} \qquad (k,\rho=1,2,\ldots m).$$

Un integrale particolare del (15) è fornito dai valori costanti delle incognite $A_\rho(t)=\delta_\rho$ ottenuti dal sistema di equazioni algebriche

$$\sum_\mu B_{\rho\mu}\delta_\rho+\frac{\gamma'_\rho}{1-k_\rho}=0 \qquad (\mu,\rho=1,2,\ldots,m).$$

Il sistema integrale generale del (15) è quindi

$$A_\rho(t)=\sum_k C_k \gamma_{k_\rho} e^{-\alpha_k e^{-t}}+\delta_\rho \qquad (k,\rho=1,2,\ldots,m).$$

Le m costanti arbitrarie C_k si calcolano sfruttando le condizioni

$$A_\rho(0)=\frac{\gamma_\rho}{1-\frac{\lambda}{\lambda_\rho}}.$$

Limitandosi alla sola prima equazione del (15) si ottiene

$$\dot{A}_1\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)-A_1\lambda B_{11}\varphi(t)-\left[\dot{\gamma}+\gamma'\varphi(t)\right]=0$$

la cui soluzione, ponendo $\frac{\gamma_1'}{\gamma_1}=E$, risulta essere

$$\begin{aligned}A_1=\frac{\gamma_0}{1-k_1}\Bigg\{&\frac{\varepsilon k_1}{\lambda B_{11}}-\frac{\varepsilon}{\lambda B_{11}}\left(e^{-\frac{\lambda B_{11}}{1-k_1}e^{t}\;1}-1\right)+\\ &+\left(1-\frac{\varepsilon k_1}{\lambda B_{11}}\right)e^{-\frac{\lambda B_{11}}{1-k_1}e^{-t}-1}\Bigg\}=\frac{\gamma_1}{1-k_1}F(t).\end{aligned} \tag{18}$$

Se la viscosità del materiale non varia con il posto, ed il valore costante di $f(x)$ si pone uguale ad α, risulta

$$\Omega'(x, \xi) = \alpha\, \Omega(x, \xi).$$

Ricordando che la funzione $\Omega(x, \xi)$ della (9) può svilupparsi nella forma bilineare

$$\Omega(x, \xi) = \sum_\rho \frac{\omega_\rho(x)\, \omega_\rho(\xi)}{\lambda_\rho}$$

si può ancora scrivere

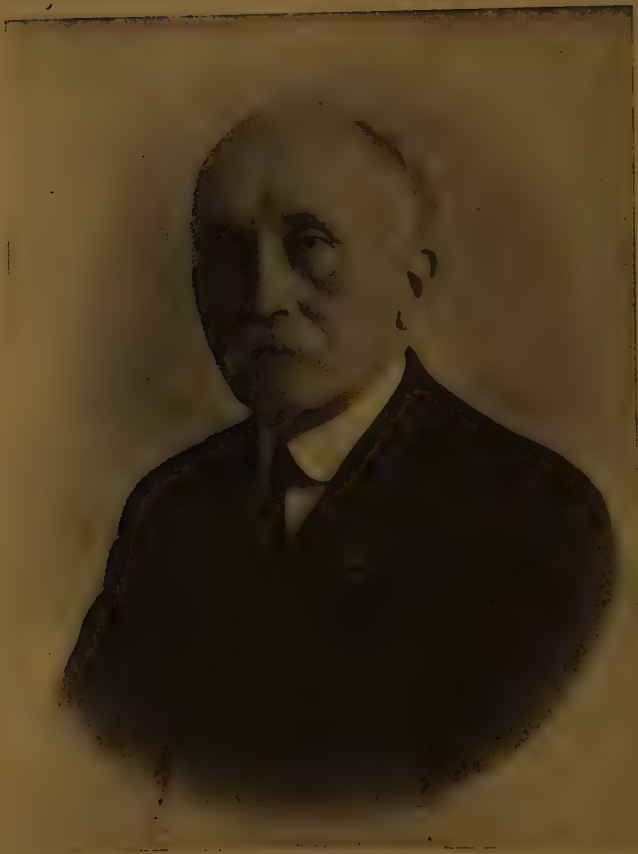
$$\Omega'(x, \xi) = \alpha \sum_\rho \frac{\omega_\rho(x)\, \omega_\rho(\xi)}{\lambda_\rho}$$

e, confrontando con la (13), risulta

$$B_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{per } \mu \neq \nu \\ \dfrac{\alpha}{\lambda_\rho} & \text{per } \mu = \nu = \rho. \end{cases}$$

Il sistema (15) si riduce, in tal caso, alle equazioni (16.*b*) del KRALL, e la (18) alla (17).

Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni, gennaio 1952.



GIOVAN BATTISTA RIZZO

N. a Monastero Vasco (Cuneo) 4-III-1863 M. a Niella Tanaro 8-II-1945

GIOVAN BATTISTA RIZZO

Commemorazione letta dal socio **Giuseppe Imbò**

(Adunanza del dì 1. marzo 1952)

E' doveroso ricordare l' opera dei nostri predecessori e questo dovere da me è sentito in modo particolare nei riguardi del sempre compianto prof. G. B. Rizzo, del quale fin dal nostro primo incontro nel luglio 1925 ebbi agio di sempre più apprezzare le spiccate doti di mente e di cuore.

Da maestro, da collega, da amico, come volle considerarmi negli ultimi anni, dimostrandosi sempre premuroso nel dare richiesti ammaestramenti, consigli con prudente riserbatezza e con paterna affabilità, ha sempre rivelato una squisitezza d' animo ed una inequivocabile coerenza con quei principi impostigli dalla duplice preparazione scientifica e morale che gli facevano considerare doveroso anche ciò che esulava dai meri doveri accademici. Questo ricordo non deve perciò essere considerato esclusivamente come un rispetto della lodevole usanza, ma principalmente come una doverosa testimonianza di stima e di affetto.

Il Rizzo nacque a Monastero Vasco (Cuneo) il 4 marzo 1863. Dopo aver frequentato le prime scuole a Mondovì Egli s' iscrisse all' Università di Torino per la laurea in Fisica. Nel 1883 fu costretto ad interrompere il corso universitario per i doveri militari che lo tennero impegnato per circa quattro anni. Alla ripresa degli studi nel 1886 Egli, quale vincitore di un apposito concorso, fu interno del Collegio Carlo Alberto per gli studenti della Provincia ed ebbe così agio di frequentare corsi regolari, in modo che conseguì la laurea in Fisica il 13 luglio 1889. In quei tempi era ammessa la nomina a posti di ruolo nel personale scientifico degli Istituti Universitari anche prima della laurea e, pertanto, per una già riconosciuta preparazione, era stato fin dall' anno precedente (1888) nominato assistente dell' Osservatorio Astronomico di Torino, posto che conservò anche dopo che il suo veneratissimo maestro Prof. Naccari lo volle nella famiglia scientifica dell' Istituto fisico dell' Università. La sua intensa attività scientifica che gli consentì il conseguimento della libera docenza in fisica sperimentale a solo qualche anno dalla laurea (1894), non gl' impedì di svolgere anche una efficace attività didattica sia nell' ambiente universitario nei frequentatissimi e ricercati corsi liberi, sia nel Liceo dell' Istituto Sociale (Torino), nello svolgimento della quale il Rizzo rivelò im-

pareggiabili doti di educatore scientifico e morale di masse studentesche. In seguito a concorsi Egli fu nominato nel 1899 professore straordinario di Fisica sperimentale dell' Università di Perugia e nel 1903 di Fisica terrestre dell' Università di Messina. Fu promosso ordinario di quest' ultima disciplina nel 1907. Il violento terremoto del 28 dic. 1908 lo trovò sul posto di lavoro. Insieme al personale addetto all' Osservatorio (del quale aveva assunto la direzione fin dal 1904) egli ed i suoi ebbero salva la vita, ma sua moglie era stata « colpita da un muro in rovina, riportando gravi ferite... ». In seguito alla sospensione dell' attività universitaria in Messina, il RIZZO fu comandato per l' insegnamento di Fisica terrestre presso l' Istituto di Studi Superiori di Firenze, conservando la direzione dell' Osservatorio di Messina che, mercè il diretto interessamento e l' encomiabile abnegazione del RIZZO, riprese il suo completo funzionamento il 1° marzo 1909 e cioè a poco più di due mesi di distanza dalla pressochè totale distruzione. Il 1° novembre 1910 il RIZZO ottenne di tornare ancora all' Università di Messina e l' anno successivo ne fu eletto Rettore, dedicandosi così totalmente all' arduo compito della ricostruzione di quello Ateneo insieme a quella dell' Istituto prediletto di Fisica terrestre e Geodesia con annesso Osservatorio. Per i suoi riconosciuti meriti di organizzatore egli venne ancora nominato commissario regio per le costruzioni dell' Istituto Superiore di magistero e della R. Scuola di Medicina Veterinaria.

Dopo diciassette anni di rettorato, il RIZZO, nel 1928, avendo espletato il suo programma e non volendo sobbarcarsi a riprovevoli ingerenze esterne, accettò il trasferimento alla primogenita cattedra di Fisica terrestre dell' Università di Napoli. In seguito al decreto del 1935 sull' anticipazione al 70° anno del collocamento a riposo dei professori universitari egli cessò dal servizio effettivo a partire dal 28 ottobre del medesimo anno.

Negli anni successivi però, compresi i duri anni della guerra e nonostante la sua già relativamente avanzata età, continuò ad interessarsi di studi e ricerche in laboratorio e in campagna. Solo in conseguenza di un cospicuo episodio cardiaco, manifestatosi nell' estate del 1943 a Niella Tanaro Egli, costretto ad evitare i disagi delle faticose campagne, si limitò ad elaborare il materiale precedentemente raccolto. Le tristissime condizioni della sua amata patria ed il dolore per la prolungata separazione dalla sua prediletta famiglia contribuirono a rapidamente stroncare quella robusta fibra che pur aveva bisogno di tranquillo riposo. Con l' otto febbraio ultimo sono trascorsi sette anni dalla sua scomparsa (8 febbraio 1945) ed in noi il suo ricordo è sempre vivo. Qualche mese prima delle morte Egli aveva scritto: « la lotta fraticida ci toglie ogni serenità di spirito ed assistiamo sgomenti alla rovina di quei principi ideali ai quali abbiamo finora inspirato la nostra vita ». Noi che, oltre a considerare il RIZZO come maestro, fummo anche ammiratori della sua dirittura morale, del lineare e nobile comportamento nei rapporti sociali, accogliamo come testamento spirituale

il pratico invito alla gelosa conservazione di quei principi solo apparentemente od anche limitatamente, almeno questa è la speranza, sconvolti dalla guerra.

Diverse Accademie e Società lo annoverarono tra i loro membri: fu difatti socio dell' Accademia dell' Agricoltura di Torino, e di questa Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche. Fu inoltre membro del Comitato per la Geodesia e per la Geofisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Presidente della Soc. Meteorologica Italiana, Presidente della Sezione di Fisica Terrestre della S. I. P. S.

Tra le onorificenze di cui il Rizzo fu insignito, ricordo quella della commenda dell' Ordine della Corona d' Italia e la nomina a Cavaliere Ufficiale dell' Ordine dei S. S. Maurizio e Lazzaro.

Nei primi anni di carriera il Rizzo venne avviato verso le ricerche meteorologiche; ed Egli intuendone subito l' alta importanza, si dedicò ad esse con salda preparazione e con fervido entusiasmo, ben consapevole delle difficoltà e dei sacrifizi ai quali sarebbe andato incontro per poter validamente contribuire al progresso della ancor giovane scienza. Avvalendosi della sua, se pur breve, esperienza, ma già bastevole, in relazione alla prontezza d' intuito, per una conoscenza generale dello stato e delle principali esigenze della materia, volle apportare contributi personali al complesso di ricerche della meteorologia metodologica, allora in voga in Italia ed all' estero e che tanto giovò per la definitiva sistemazione dei servizi meteorologici e per l' interpretazione di importanti fenomeni. Molti erano gli argomenti in discussione, a due di essi il Rizzo rivolse la sua particolare attenzione. Il primo, che aveva già costituito l' argomento per la sua tesi di laurea, riguardava l' utilità del psicrometro per la misura dell' umidità atmosferica. Fin dalla prima introduzione nel 1866 di questo strumento, si era molto dubitato della esattezza delle determinazioni ed il Chistoni che aveva studiato a lungo l' argomento era del parere che il psicrometro non si sarebbe dovuto adoperare negli osservatori meteorici come uno strumento abituale od almeno come unico per misure di umidità. Di parere alquanto diverso era il Rizzo, che in base a rigorose ricerche comparative, pervenne alla conclusione che il psicrometro a ventilatore, adoperato nelle gabbie meteoriche, avrebbe consentito con apposite formule di riduzione la determinazione della tensione del vapore ed ancora dell' umidità relativa con un' approssimazione non inferiore a nessuno dei migliori igrometri. Il suggerimento del Rizzo è stato ufficialmente riconosciuto ed oggi il psicometro per la sua praticità è adoperato in tutti gli osservatori meteorici.

L' altro argomento consisteva nella introduzione di norme consententi la deduzione della vera media giornaliera di elementi meteorici, ritenuta, almeno mediamente, coincidente con la media del minore numero possibile di dirette osservazioni eseguite in opportune ore della giornata. Eviden-

temente il problema non consente un' ideale soluzione e pertanto al RIZZO, più che per la soluzione trovata, spetta il merito di aver affrontato l' argomento con serietà e semplicità d' impostazione, in modo da dare ai meteorologi, da un canto un' idea dell' ordine di grandezza delle correzioni da apportare alle medie ottenute dalle varie formule allora in uso e d' altro canto la sicurezza del non raggiunto vantaggio con l' adozione, introdotta nel 1894, per le osservazioni meteorologiche, dell' ora media dell' E. C., anzichè dell' ora locale.

Con la costante mira dell' attuazione del progettato miglioramento del servizio meteorico Egli s' interessò anche di statistica meteorologica. Le sue mansioni di osservatore meteorico ed il necessario controllo, che Egli ebbe agio di effettuare, dei dati precedenti e di altre stazioni per confronti o per deduzioni di andamenti, l' avevano persuaso di una generale mancanza di omogeneità nelle per lo più esistenti serie di osservazioni che, se pur a volte singolarmente esatte e scrupolosamente eseguite, non si prestavano spesso ad una proficua indagine statistica. Sull' esempio dei suoi immediati predecessori egli volle ovviare ai lamentati ostacoli per il progresso della meteorologia statistica sia proseguendo per l' undicennio 1888-1898 la pubblicazione annuale dei bollettini meteorici, sia procedendo per Torino alla analisi critica, alla elaborazione ed allo studio sintetico dei dati raccolti con continuità sin dal 1753 dall' Osservatorio Meteorico, di cui in una pubblicazione a parte egli precisa importanza e compiti. Mentre nei bollettini Egli cercò di contribuire con i dettagliati prospetti riassuntivi a fornire gli elementi utili per precise deduzioni sull' andamento meteorico stagionale ed annuale per la città di Torino; nella pregevole memoria « Il clima di Torino » Egli non ebbe il solo scopo di rivelare i lineamenti climatici della città, ma si propose di apportare, come dice Egli stesso, anche « un utile contributo alla meteorologia generale » determinando « l' azione che sul clima di una regione esercitano le alte montagne, le valli ed i grandi corsi d' acqua ». Nè si limitò a porre in evidenza questa azione, ma, giovandosi anche di altre osservazioni della zona, volle altrove ancora dimostrare l' azione orografica da parte delle catene delle Alpi sulla distribuzione barica, contribuendo così anche a ricerche di meteorologia dinamica.

Fin da queste poderose e pazienti ricerche della fase iniziale dell' attività scientifica del RIZZO emerge un pregevole metodo d' indagine, costantemente seguito sino agli ultimi lavori e basato su una rigorosa e seria impostazione e discussione dei problemi da risolvere col sempre realizzato intendimento di ottenere il massimo, e solo il massimo contributo consentito dagli elementi a disposizione. Sotto questo punto di vista devono essere considerato le ricerche del medesimo tempo e riguardanti le eventuali relazioni tra elementi meteorici ed attività solare. Non ebbe successivamente l' opportunità d' interessarsi dell' argomento, come sarebbe stato suo desiderio; ma solo negli ultimi anni vi ritornò con una apprezzatissima nota

riassuntiva nella quale, dopo aver dimostrato per fenomeni terrestri un' indiscutibile uguale periodicità a quella delle macchie solari, espresse la fiducia che nel futuro in molti casi si sarebbe avuta la possibilità di una previsione delle vicende del tempo mediante l' analisi di variazioni già accertate.

La decisa affermazione scientifica per serietà e per competenza valse al Rizzo la nomina ad *esperto meteorologo* in relazione alla spedizione polare del 1899-1900 del Duca degli Abbruzzi. Egli si adoperò perta to oltre che per i rigorosi indispensabili controlli degli strumenti occorsi per le regolari osservazioni meteoriche, prima ella partenza e dopo il ritorno, anche alla riordinazione ed alla discussione « con sapiente cura », come dice il Cagni, dei dati raccolti. E' appunto in tale lavoro in cui il Rizzo mostra tra l' altro l' importanza dello studio della esigua variazione diurna della pressione atmosferica nelle zone polari L' occasione offertagli di ricerche di meteorologia polare determinò in Rizzo un interessamento per la soluzione dei problemi ad esse inerenti. Volle perciò prendere poi in esame le osservazioni (meteoriche, di radiazioni penetranti, di ionizzazione e conducibilità, di dispersione, di radioattività) compiute in occasione della spedizione polare di U. Nobile colla aeronave « Italia » nel 1928. Le interessanti conclusioni ottenute, dopo una dettagliata analisi dei dati, lasciarono dedurre al Rizzo che la spedizione del Nobile si sarebbe dovuta considerare fra le più utili al progresso della Geografia e della Geofisica.

Mai il Rizzo dimenticò le basilari premesse del diuturno lavoro ed anche pertanto nelle successive sedi di Messina e di Napoli s' interessò per la pubblicazione dei periodici bollettini meteorici. Anzi a Napoli dopo la istituzione nel settembre 1929 dell' Osservatorio Meteorologico di Castellammare col concorso di Enti pubblici ed in particolare del Consiglio dell' Economia della Provincia, fu indotto alla pubblicazione della « Rivista di Climatologia Napoletana » con la quale il Rizzo si proponeva non solo di dare un resoconto dei dati meteorici della rete di Osservatori geofisici e meteorici della regione napoletana, ma anche di inserirvi lavori di climatologia, di geosifica (in relazione, come dice nella prefazione, con l' igiene e con la terapia) e relativi in genere ad argomenti utili per una « migliore conoscenza della regione napoletana e dei tesori che vi si trovano diffusi ». Ed un programma generico di studi, da condursi parallelamente, di geofisica e di biologia, venne enunciato dal Rizzo nel discorso che tenne precisamente in occasione dell' inaugurazione dell' Osservatorio di Castellammare, primo passo per una progettata creazione di un Istituto Idrologico internazionale. Purtroppo in questo fervore d' iniziative il Rizzo non venne secondato, anzi, per incomprensione dell' alta finalità della Rivista da parte degli Enti interessati, non furono mantenuti neanche gli assunti impegni in modo che la pubblicazione incominciata nel 1930 cessò dopo solo qualche anno senza che fosse mai stato realizzato per intero il progettato programma.

Il Rizzo volle mostrare la sua predilezione per le ricerche meteorologiche anche dopo il collocamento a riposo con i numerosi lavori, tutti comparsi nella nuova serie di sole cinque annate (1939-1943) della Rivista di Meteorologia, organo della Società Meteorologica Italiana, di cui il Rizzo è stato Presidente dalla ricostruzione nel 1939 fino alla pratica cessazione in seguito agli eventi del 1943. Egli, fedele al suo metodo d'indagine ed alla sua funzione di maestro, pei vari e tutti importanti argomenti trattati, ha cercato di indicare agli studiosi le vie da seguire per la soluzione dei problemi fondamentali della meteorologia che Egli identifica nei movimenti dell'aria e nella condensazione del vapore atmosferico. A proposito di questo secondo problema devono essere ricordate ancora le ricerche sull'efficienza degli spari contro la grandine, che per incarico del Ministero dell'Agricoltura, Industria e Commercio, Egli eseguì per circa un triennio insieme al prof. Pochettino. Furono appunto i risultati negativi ottenuti nel triennio di campagne grandinifughe a fare allora crollare le speranze da parte di Società e privati entusiasmati da illusori successi.

Per meglio e sempre più profondamento studiare le variazioni negli elementi meteorologici, il Rizzo fin dai primi anni di assistentato all'Università di Torino, volle intraprendere ricerche di radiazione solare, convinto che « la radiazione solare è la prima ragione dei fenomeni meteorologici » perciò, come dice il Rizzo stesso, « questi diventano più chiari e se ne possono più razionalmente studiare le variazioni quando si studiano in relazione colla radiazione medesima ». Il principale scopo delle ricerche era quello di giungere ad una determinazione più accettabile della *costante solare*, i cui valori fin allora ottenuti risultavano notevolmente discordi. Le prime serie di misure attinometriche eseguite dal Rizzo rimontano all'inverno 1889 (Moncenisio e Forte Roncia) e furono continuate negli anni successivi 1890 e 1891 a Susa ed a Rocciamelone. I risultati ottenuti non lo soddifecero ed egli rinunziò persino a pubblicarli. Il mancato accordo tra le osservazioni fu attribuito tra l'altro all'uso di uno strumento disadatto in modo che per le successive misure egli apportò modificazioni all'apparecchio già adoperato in modo da eliminare gli inconvenienti lamentati. Anche la prima nuova serie di misure eseguite nel settembre 1896 a varie altezze sul monte Rosa, non dette il risultato sperato sia per una giustificabile mancata compatibilità tra osservazioni non contemporanee, sia ancora per una dimostrata impossibilità di deduzione (con i metodi e formule allora in uso) del valore della costante solare in base ai dati di una sola stazione, anche se le osservazioni, come quelle sottoposte ad esame e cioè quelle eseguite alla Capanna Regina Margherita, fossero state eseguite in condizioni da ritenersi ideali. Queste esperienze e deduzioni gli permisero di organizzare per l'anno successivo (1897) una campagna di misure contemporanee a varie quote lungo le pendici del Rocciamelone con tale accuratezza da raggiungere l'atteso successo. L'ottenuto valore

per la costante solare di 2,5 $\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{ sec}}$ venne allora considerato soddisfacente dai principali studiosi dell' argomento quali il VIOLLE l' ANGSTRÖM l' ARRHENIUS nonostante il disaccordo coi valori dati da qualcuno di essi, anzi l' ARRHENIUS nel « Lehrbuch der Kosmischen Physik » a proposito della costante solare così dice ... « vorläufig wollen wir uns damit begnugen mit RIZZO anzunehmen, dass der wahrscheinlichste Wert ... 2,5 cal. pro Minute und cm^2 ausmacht ».

Queste ricerche condotte sempre con « quel vero amore », come dice Egli stesso nel suo primo lavoro sull' argomento, inspirarono quella serie di cinque lavori di spettroscopia, eseguiti presso l' Istituto di Fisica con opportuni accorgimenti sperimentali, spesso ideati per l' occasione e sempre seguiti da felice interpretazione dei risultati ottenuti.

A questi lavori bisogna aggiungere altri due sull' argon, il primo dei quali, eseguito nel 1897, e cioè solamente tre anni dopo la sua scoperta da Lord RAILEIGH, ha notevole importanza per la inequivocabile dimostrazione che l' argon fosse costituito da unico elemento e non da una miscela o combinazione, come si supponeva da un gran numero di ricercatori. Nell' altro Egli rilevò la presenza dell' argon in alcune esalazioni postvulcaniche della campagna romana.

In seguito alla nomina per concorso a titolare della cattedra di Fisica Terrestre dell' Università di Messina, il RIZZO sentì la necessità di far convergere le ricerche anche sul campo della Sismologia. « Io — così scrisse il RIZZO nella prima memoria sull' argomento — che sono nato ed ho compiuto i miei studi ai piedi delle Alpi, in una regione dove i fenomeni sismici sensibili hanno una frequenza e una intensità di gran lunga minore che non nelle altre regioni d' Italia, ero a questi studi *homo novus*, ma poichè la mia sorte ha voluto che fossi chiamato a Messina a insegnarvi la Fisica terrestre e a dirigere un Osservatorio nel quale la parte sismica ha una importanza grandissima, ho creduto mio stretto dovere di dedicarmi allo studio delle varie questioni che riguardano i terremoti, e con tanto maggiore impegno, quanto, per il passato, era stata minore l' attenzione da me posta a questo ramo della Fisica Terrestre ». Egli tenne fede alla sua promessa ed in diversi lavori, accanto a studi teorici aventi per scopo la interpretazione delle fasi riscontrate nei sismogrammi, eseguì accurate ricerche relative alla velocità di propagazione delle onde sismiche, giovandosi del ricco materiale di osservazioni raccolto in occasione del terremoto calabro dell' 8 settembre 1905 (del quale a parte eseguì anche lo studio macrosismico) e del successivo terremoto anche calabro del 23 ottobre 1907 nonchè del violento terremoto di Messina del 28 dicembre 1908. Questi studi, all' epoca in cui furono condotti, destarono molto interesse per metodi di indagine e per conclusioni.

Sempre in questo gruppo di lavori ha notevole importanza quello ori-

ginale relativo alla deduzione della profondità ipocentrale in base alla identificazione della distanza epicentrale corrispondente ad un flesso che si sarebbe dovuto rilevare nelle dromocrone. Peccato però che, nonostante la giustificazione teorica del flesso, il metodo, per svariate difficoltà, non possa trovare la sua pratica realizzazione.

Volle il Rizzo, rimanendo in questo campo, estendere le proprie ricerche anche allo studio della genesi di eventuali pertubazioni magnetiche accompagnanti i moti sismici. Le sue deduzioni, basate sull' analisi critica di importanti rilievi raccolti in occasione del terremoto calabro dell'8 settembre 1905 e comprovanti una prevalente azione meccanica, possono essere ancora oggi accettate quasi in pieno. Egli però non si cimentava per la prima volta in ricerche di magnetismo terrestre. Già in anni precedenti, in un unico ma non per questo meno interessante lavoro, aveva dato un resoconto delle sue ricerche per la determinazione dei valori assoluti degli elementi magnetici per una stazione della città di Torino, localmente non perturbata.

Da esse confrontate con quelle eseguite in epoche precedenti, Egli dedusse valori delle variazioni secolari locali, in buon accordo con quelli oggi ammessi. Invero le osservazioni effettuate a Torino rappresentano solo una parte ben limitata dei numerosi e fitti rilevamenti magnetici effettuati dal Rizzo negli anni 1895, 1896, 1897 con lo scopo di dedurre la legge di variazione degli elementi magnetici nell' alta valle del Po; ma il lavoro che avrebbe dovuto figurare negli annali della Meteorologia italiana, per le sopraggiunte nuove occupazioni, non fu mai pubblicato.

Col trasferimento a Napoli si nota ancora un cambio d' indirizzo nelle predominanti ricerche, che vennero dirette su argomenti riguardanti lo studio dell' elettricità atmosferica. Egli negli anni giovanili s' era già interessato fugacemente dell' effetto Lenard in prossimità di cascate, ma le sue molteplici ricerche in altri campi gli impedirono il desiderato proseguimento anche in questo. L' estensione degli studi personali e dei suoi allievi non deve però essere considerata una prosecuzione della interrotta attività giovanile, ma una giustificazione di essa viene data dallo stesso Rizzo, secondo il quale essa doveva rappresentare la continuazione di quegli studi già condotti nel passato dal Palmieri pei quali questi, già titolare di filosofia dell' Università aveva acquistato tale rinomanza da indurre le autorità competenti alla creazione precisamente dell' Istituto di Fisica terrestre. « Fin da quando ebbi l' onore, dice il Rizzo, di succedere a Luigi Palmieri, il quale fu uno dei più benemeriti studiosi dell' elettricità atmosferica, ho considerato come un dovere riprendere nell' Istituto che Egli aveva creato le osservazioni e le esperienze intorno a questi fenomeni ». L' argomento preferito fu quello delle radiazioni cosmiche delle quali in diverse occasioni Egli ha in modo chiaro ed inequivocabile rivendicato la priorità della scoperta al Pacini. Ed il suo interessamento per l' argomento non si limitò alla esposizione ed all' analisi critica di ricerche dei varî studiosi, dei quali ha sempre

cercato di porre in giusta luce i contributi da essi apportati, ma con giovanile ardore, nonostante i suoi settant' anni, volle apportare anche il personale contributo con interessanti osservazioni eseguite a varie altezze da metri 1810 a metri 3537 s. l. d. m. lungo le pendici del Rocciamelone, la quale montagna gli era « particolarmente cara » sia col ricordargli — lo dice egli stesso — « gli anni ormai lontani della giovinezza », sia ancora perchè rappresentava « il ritorno ad un sereno lavoro scientifico, a grandi altezze dell' atmosfera, come nella casa ospitale di un amico ». La memoria riportante le osservazioni e deduzioni, apparsa negli Atti di questa Accademia, venne accolta favorevolmente per i pregevoli risultati ottenuti.

Coi lavori successivi Egli mostrò di voler seguire i rapidi progressi sull' argomento, cercando però di rimanere sempre nel campo della Fisica Terrestre. Tra le varie deduzioni risulta interessante quella relativa alla genesi della diminuzione della media intensità della radiazione cosmica al diminuire della latitudine, attribuita dal Rizzo ad un eventuale rigonfiamento atmosferico nella regione equatoriale. Ed ancora deve essere ricordata la deduzione del Rizzo di un pratico assorbimento delle dette radiazioni da parte di nubi temporalesche. Egli era del parere che molti problemi ancora oscuri relativi all' elettricità atmosferica e tellurica (tra i quali anche quello relativo alla permanente carica negativa della Terra) avrebbero avuto nel futuro una spiegazione con un più approfondito studio sulla radiazione cosmica. Intraprese anche rlcerche sistematiche atte a dare un quadro sulla entità nonchè sulle cause dell' ionizzazione per la vasta zona flegreo-vesuviana e di esse riuscì a presentare a questa Accademia solo il primo studio relativo alle radiazioni gamma del tufo vulcanico di Napoli. Purtroppo altri studi già iniziati e qualcuno già completato non furono pubblicati per il sopraggiunto ed inatteso collocamento a riposo. Il Rizzo però volle anche in seguito continuare le sue ricerche sperimentali sull' argomento nella zona alpina, ma anche queste dovettero essere interrotte. Di esse non si ha traccia esplicita, ma del suo programma però si hanno indicazioni dagli spunti per ricerche emergenti dai critici lavori di compilazione della fase finale della sua vasta e feconda attività.

In complesso nella vastissima produzione il Rizzo si è costantemente preoccupato di un' impostazione rigorosa del problema da studiare, non disgiunta ad una preventiva minuziosa ricerca bibliografica e di una successiva autocritica di metodi, di osservazioni, di deduzioni. Molte conclusioni sono ormai sorpassate ma le ricerche, anche se superate, suggeriscono sempre le vie da battere per seriamente contribuire allo sviluppo della Fisica Tesrestre.

Sua dominante preoccupazione nel diuturno svolgimento della sua attività da professore e da rettore è stata quella di inculcare con l' esempio e con la facile e suadente parola agli studenti ed ai colleghi il senso delle relative responsabilità in modo da contribuire ciascuno alla finalità della

istruzione universitaria. Data la sua particolare competenza sulle esigenze delle Facoltà di Scienze, più volte Egli cercò di mettere in evidenza le deficienze e le lacune degli ordinamenti. Molte, anzi quasi tutte le proposte del RIZZO, tra le quali ad esempio quella della equiripartizione delle cattedre tra le branche che costituiscono la Facoltà di Scienze sono state attuate, ma il problema delle distinzioni delle materie d'insegnamento in fondamentali e complementari pur avendo già avuto una parziale sistemazione, secondo il progetto RIZZO, rimane sempre attuale. Ed era ovvio il suo particolare interessamento per un tale problema che tanto riguardava la cattedra di cui era titolare.

Molto si adoperò che con una adeguata sitemazione dei servizi geofisici venissero concessi mezzi sufficienti per il normale funzionamento di un maggior numero di istituti nei quali si potessero efficacemente impartire insegnamenti teorico-pratici su quegli argomenti geofisici la cui importanza per uno sviluppo industriale, già allora apparso, s'è andato sempre più affermando. Anche questa forma di attività fu svolta dal RIZZO con l'abituale, tenace e paziente, impegno pur di giovar all'incremento ed alla diffusione nella nazione di « quella soda e completa cultura scientifica che è il fondamento di ogni progresso ». E la serietà degli studi con conseguenti oneri da parte degl'insegnanti ha sempre sostenuta nella sue qualità di rettore nell'epoca critica della ricostruzione e degli ampliamenti dell'Università di Messina. Per dedicarsi completamente alla difficile opera Egli dovette rinunziare allo svolgimento normale dell'attività scientifica. La preparazione profonda, l'onestà e la bontà dei suoi propositi riuscirono a riportare successo su difficoltà, tergiversazioni, combriccole, impedendo soppressioni o mutilazioni per quell'Ateneo al quale il triste ricordo di quella dolorosa giornata del 28 dic. 1908, aveva determinato un sentimentale potente legame. Quanti avrebbero bramato un trasferimento nell'ambita sede di Firenze ed il RIZZO, che pur l'aveva ottenuta, volle, appena possibile, tornare di « sua volontà » in Messina distrutta per procedere alla ricostruzione del suo Istituto e poi dal 1911 a quella totale dell'Università.

Nel 1928, ancora per la dirittura del suo carattere che gli vietava di cedere ad imposizioni estranee, chiese ed ottenne il trasferimento alla cattedra di Fisica Terrestre dell'Università di Napoli, ma col cuore non si distaccò mai dalla città di adozione e dall'Università da lui rimessa in piedi e di cui seguiva gli ulteriori sviluppi. A ricordo della sua poderosa e proficua attività di rettore, nel 1935, all'atto del suo collocamento a riposo, le autorità accademiche riconoscenti vollero che una lapide, con l'immagine del RIZZO, seguita da un'iscrizione dettata dal latinista prof. STAMPINI, collocata nell'atrio dell'Università, ne ricordasse la costante e fattiva opera.

Il segreto del successo nei vari campi di attività del RIZZO sta nella integrità di carattere non disposta a compromessi ma sempre pronta ad

accettare soluzioni parziali come primi passi per il raggiungimento delle mete.

Egli anche a se stesso impose norme di vita che non gli consentissero patteggiamenti con la sua coscienza; e nei rapporti con la famiglia, coi colleghi, cogli amici, con gli studenti ha sempre rispettato e voluto che si rispettassero le norme di reciproche comprensioni.

Si disse del suo predecessore PALMIERI che il suo ingresso in ufficio potesse permettere di regolare gli orologi; ma per il RIZZO la puntualità assoluta in ogni sua manifestazione fu una dote che da sola basterebbe a provare la totale dedizione al dovere. Può dirsi che il senso del dovere ha inspirato tutta la sua attività e di cui già si è avuto prova nei riguardi ad esempio delle estensioni dei campi di ricerche dopo i due trasferimenti a Messina e a Napoli. Ad una doverosa testimonianza di affetto o di devozione verso gli amici, maestri o colleghi scomparsi è dovuta la molteplicità dei ricordi biografici o necrologie; ad un senso di giustizia la rivendicazione per il PACINI della prima scoperta dei raggi cosmici ed ancora la sempre fedele e scrupolosa indicazione di dati bibliografici; ad un doveroso interessamento per la famiglia studentesca la pubblicazione degli interessantissimi corsi di lezioni.

Il RIZZO, il « grand honnête homme » come lo ha definito il professore J. P. ROTHÉ pertanto lascia sotto il duplice aspetto di scienziato e di uomo una scia indelebile di opere, di insegnamento, di luminoso esempio di bontà e di totale dedizione al dovere e noi altri che lo stimammo, lo apprezzammo con devota venerazione ci siamo adoperati perchè i frutti della sua instancabile attività possano, come sarebbe stato suo sicuro desiderio, costituire per tutti il più prezioso retaggio.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DEL PROF. G. B. RIZZO

1. *La radiazione solare e la temperatura dell'aria a Torino durante l'eclisse di sole del giorno 16-17 giugno 1890.* Mem. Soc. Spettr. Ital., XIX, 1890.
2. *Le linee telluriche dello spettro solare. Osservazioni fatte al Rocciamelone nel febbraio 1891.* Mem. Soc. Spettr. Ital., XX, 1891.
3. *Di un notevole tipo isobarico subalpino.* Atti Acc. Sc. Torino, XXVI, 1891.
4. *Variazioni prodotte dal calore in alcuni spettri d'assorbimento.* Atti Acc. Sc. Torino, XXVI, 1891.
5. *Il clima di Torino.* Mem. R. Acc. Sc. Torino. Sez. II, XLIII, 1892.
6. *Die säkularen Temperaturschwankungen in Turin.* Met. Zeit., X, 1893.
7. *Intorno all'assorbimento della luce nel platino a diverse temperature.* Atti Acc. Sc. Torino, XXXVIII, 1893; Nuovo Cim., Ser. III, 35, 1894.

8. *Sulle proprietà delle linee e delle bande negli spettri d'assorbimento.* Nuovo Cimento, 3ª Ser., 1894.

9. *Sull'estensione della legge di Kirkoff intorno alla relazione fra l'assorbimento e l'emissione della luce.* Atti Acc. Sc. Torino, XXIX, 1894.

10. *Sul modo di dedurre la media giornaliera delle osservazioni meteorologiche fatte a Torino in tempo medio dell'Europa Centrale.* Atti Acc. Sc. Torino, XXX, 1895.

11. *La durata dello splendore del sole sull'orizzonte di Torino.* Atti Acc. Sc. Torino, XXXI, 1896.

12. *Ricerche spettroscopiche sull'argon.* Atti Acc. Sc. Torino, XXXII, 1896-1897.

13. *Commemorazione di Galileo Ferraris.* Ann. R. Acc. Agr. Torino, XL, 1897.

14. *L'osservatorio meteorologico di Torino.* Tip. Candeletti, Torino, 1897.

15. *L'energia solare.* Nuovo Cim. Ser. IV, 6º, 1897.

16. *Sulle emanazioni vulcaniche dell'età presente nella campagna romana.* Atti Acc. Sc. Torino, XXXIII, 1897-1898.

17. *Nuove misure del calore solare.* Mem. Soc. Spettr. Ital., XXVI, 1897.

18. *Misure assolute del calore solare fatte alla Capanna Regina Margherita sul Monte Rosa.* Mem. Soc. Spettr. Ital., XXII, 1897.

19. *Sulla relazione fra le macchie solari e la temperatura dell'aria a Torino.* Ann. R. Acc. d'Agr. di Torino, XL, 1897.

20. *Sulla misura della umidità atmosferica col psicrometro ventilatore.* Nuovo Cimento, Ser. IV, VI, 1897.

21. *Valori assoluti e variazioni secolari degli elementi del magnetismo terrestre a Torino.* Atti Acc. Sc. Torino, XXXII, 1897.

22. *Sopra le recenti misure della « Costante Solare ».* Acc. Sc. Torino, Ser. II, XLVIII, Torino, 1898.

23. *Misure attinometriche del calore solare eseguite sulle Alpi.* Nuovo Cimento, Ser. 4ª, VII, 1898.

24. *Oss. Meteoriche fatte nell'anno 1888 dall' Oss. della R. Univ. di Torino.* Atti Acc. Sc. Torino, XXV, 1890 (per gli anni successivi: 1889, XXV; 1890, XXVI; 1891, XXVII; 1892, XXVIII; 1893, XXIX; 1894, XXX; 1895, XXXI; 1896, XXXII; 1897 (con V. Baldi), XXXIII).

25. *Una vantaggiosa disposizione sperimentale per lo studio degli spettri di diffrazione dei reticoli concavi.* Atti Acc. Sc. Torino, XXXIV, 1899. Mem. Soc. Spettr. Ital., XXVIII, 1899.

26. *Relazione degli studi fatti nell'anno 1900 dalla Stazione governativa per lo studio dei temporali e degli esperimenti grandinifughi in S. Giorgio Monferrato.* Ann. Uff. Centr. Met. e Geod. Ser. II, XXIII, 1901.

27. *Relazione sulle osservazioni meteoriche. Osservazioni scientifiche eseguite durante la spedizione polare di S. A. R. Luigi Amedeo di Savoia 1899-1900.* U. Hoepli, 1903.

28. *Contributo allo studio della dispersione elettrica nell'atmosfera.* Atti Acc. Sc. Torino, XXXVIII, 1903.

29. *Sopra il calcolo della costante solare.* Atti Acc. Sc. Torino, XXXIII, 1903.

30. *Norme per le osservazioni termo-pluviometriche e dei temporali*. Tip. D'Angelo, Messina, 1904.
31. *Sulla velocità di propagazione delle onde sismiche nel terremoto della Calabria del giorno 8 sett. 1905*. Mem. Acc. Sc. Torino, Ser. II, LVII, 1905.
32. *Sopra il calcolo della profondità degli ipocentri nei movimenti sismici*. Atti Acc. Sc. Torino, XLI, 1906.
33. *Sopra le perturbazioni magnetiche dovute al terremoto della Calabria dell'8 sett. 1905*. Terr. Magn. and El., XI, 1906.
34. *Sulla propagazione dei terremoti. Saggio d'interpretazione dei diagrammi sismici* (in due note). Atti Acc. Sc. Torino, XLII, 1907.
35. *Contributo allo studio del terremoto della Calabria del giorno 8 sett. 1905*. Atti Acc. Peloritana, XXII, 1907.
36. *Sopra un massimo notturno della temperatura durante l'inverno in alcune regioni di collina*. Riv. d'Astr. e Sc. affini, I, 1907.
37. *Nuovo contributo allo studio della propagazione dei movimenti sismici*. Mem. Acc. Sc. Torino, Ser. II, LIX, 1908.
38. *Per la cattedra di Fisica Terrestre*. Annuario dell'Oss. di Messina, 1907.
39. *Intorno al posto della Fisica Terrestre tra le altre Scienze*. Riv. di Astronomia, e Sc. affini, Anno II, 1908.
40. *La riforma universitaria in Italia*. Riv. d'Italia, XI, 1908.
41. *Il nuovo regolamento delle Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali e la ripartizione delle materie d'insegnamento*. Messina, 1908.
42. *Relazione sul terremoto di Messina e della Calabria del 28 dic. 1908*. Tip. Lincei, Roma, 1909.
43. *Sulla propagazione dei movimenti prodotti dal terremoto di Messina del 28 dic. 1908*. Mem. Acc. Sc. Torino, Ser. II, LXI, 1910.
44. *Osservazioni sismiche degli anni: 1905, 1906, 1907* (con G. Spadaro) *1911*. Dagli Annuari degli anni: 1905, 1906, 1907, 1911.
45. *L'Osservatorio di Messina*. Annuari del 1904, 1905, 1906, 1907, 1908, 1909, 1910, 1911.
46. *Giovanni Rapidà* (Necrologia). Annuario dell'anno 1908 (1911).
47. *The velocity of earth movements caused by the Messina Earthquake*. Nature, LXXXVI, 1911.
48. *Osservazioni sul terremoto del 28 dic. 1908*. Annuario dell'anno 1908 (1911).
49. *La Fisica Terrestre e l'osservatorio di Messina*. Univ. Ital., n. 12-13, 1911.
50. *L'ordinamento delle Facoltà di Scienze nelle Università Italiane*. Rivista d'Italia, 1911, Univ. Ital., X, 1911.
51. *I nuovi orizzonti della Geofisica*. Atti Soc. Ital. Progr. Sc., XI Riun. Trieste, 1921.
52. *Sulla riforma dell'insegnamento universitario*. D'Angelo, Messina, 1921.
53. *Intorno all'organizzazione del servizio sismologico italiano*. Rel. alla Ass. dell'Un. Int. di Geod. e di Geof. Roma, 1922.
54. *Per l'integrità dell'ateneo messinese*. D'Angelo, Messina, 1922.

55. *I pieni poteri e l'Università di Messina.* L'Eco della Sicilia e delle Calabrie. Giornale d'Italia: 17-11-1922.
56. *La futura sede delle Cliniche universitarie di Messina.* L'Eco di Messina e delle Calabrie: 5-11-1922.
57. *L'Università di Messina e i pieni poteri al Governo.* Il Giornale d'Italia, 17-11-1922.
58. *La Fisica dell'aria.* Atti della Soc. Ital. per il Progr. delle Sc., XII. Riunione, I, 263, 1924.
59. *Discorso pronunziato nel cinquantesimo anniversario dell'istituzione delle Scuole Apostoliche presso il Santuario di Mondovì solennemente celebrato dagli antichi e dai nuovi allievi il 19 ott. 1922.* Soc. Tip. Ed. Monregalese, Mondovì, 1923.
60. *Le glorie della Biblioteca Universitaria di Messina.* L'eco di Messina e delle Calabrie, 13, IV, 1923.
61. *I problemi della Sismologia moderna.* Riv. d'Italia, XXVII, 1924.
62. *Relazione a corredo dello schema di convenzione per il mantenimento della R. Univ. di Messina.* Stab. Tip. Ind. Messina, 1924.
63. (con E. ODDONE). *Lo stato attuale della Sismologia in Italia.* Boll. n. 7 del Cons. Naz. della Geod. e Geof., 1924.
64. *Relazione sulla II Assemblea generale dell'Unione Geod. e Geof. tenutasi a Madrid dal 1° all'8 ott. 1924. Sez. di Sismologia.* Boll. n. 9 del Cons. Naz. Ital. Geod. e Geof., 1925.
65. *L'insegnamento della Geofisica e il nuovo assetto delle Facoltà di Scienze.* Stab. Tip. Ind. Messina, 1924.
66. *Relazione del Magnifico Rettore.* Dagli Annuari della R. Un. di Messina per gli anni accademici dal 1911 al 1927.
67. *Relazione sullo svolgimento dei lavori della Sezione di Sismologia alla III Assemblea Generale dell'Un. Int. Geod. e Geof. tenutasi a Praga dal 3 al 10 sett. 1927.* Boll. Com. Naz. Ital. Geod. e Geof. Cons. Naz. Ric. 9-1927.
68. *I rapporti fra le cliniche della R. Università di Messina e il grande ospedale civico « Piemonte ».* Saitti e Caminiti, Messina, 1928.
69. *Francesco Todaro e l'Università di Messina.* Discorso. Saitti e Caminiti, Messina, 1928.
70. *Sull'atmosfera terrestre considerata come colloide.* Atti Soc. Ital. per il Progr. delle Sc., XVIII Riun., II, 84, 1930.
71. *La Fisica dell'atmosfera nei rapporti con la biologia.* Napoli, S.I.E.M., 1929.
72. *La scoperta e le principali proprietà delle radiazioni penetranti.* Rivendicazione italiana. L'elettricista, XXXVIII, 1929.
73. *Le radiazioni penetranti.* Atti Soc. Ital. Progr. Sc. XVIII, Riun. I, 1929.
74. *Ricerche sulle radiazioni penetranti.* Atti Soc. Ital. Progr. Sc. XIX, Riun. II, 55, 1931.
75. *Piccoli e grossi corpuscoli elettrizzati (ioni) nell'aria.* Boll. Cons. Naz. Ital. Geod. Geof., 2ª Ser., I, 1931.

76. *I risultati scientifici della spedizione polare di U. Nobile colla aeronave « Italia » nel 1928*. Riv. Geog. Ital., XXXVIII, 1931.

77. *Recenti indagini sulla radiazione cosmica*. Atti Soc. Ital. Progr. Sc. 22 Riun. II, 237, 1934.

78. *Rivista di climatologia napoletana*. Pubblicazione mensile (num. speciale del 1° settembre 1930) e successivi numeri fino al 1932.

79. *I nuovi indirizzi delle ricerche sulla elettricità atmosferica nell'Istituto di Fisica terrestre della R. Università di Napoli. Le radiazioni penetranti*. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., Ser. IV, II, 1933.

80. *I raggi gamma del tufo vulcanico di Napoli*. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., Ser. IV, II, 1933.

81. *Elettricità atmosferica* (XIII); *Fulmine* (XVI); *Fuochi di Sant'Elmo* (XVI); *Grandine* (XVII); *Lampo* (XX). Enciclopedia Treccani.

82. *Biografie*: *Ebert Herman* (XIII); *Edlund Erik* (XIII); *Elster Julius* (XIII); *Exner Franz* (XIII); *Gerland Georg* (XVI); *Gockelr Albert* (XVI); *Mattecci Raffaele Vittorio* (XVII); Enciclopedia Treccani.

83. *Lezioni di Fisica Terrestre. Meteorologia*, 2ª edizione (1ª ed. 1929). Napoli, 1933.

84. *Luigi Palazzo*. La Meteorologia pratica, XIV, 1933.

85. *Luigi Palazzo*. Comptes Rendus de l'Assemblée de Lisbonne, 17-25 sept. 1933-1934.

86. *Le ultraradiazioni e i fulmini*. Riv. di Fis. Mat. e Sc. naturali, VII, 1933.

87. *Misura delle radiazioni penetranti eseguita sul monte Rocciamelone*. Atti R. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli; Ser. 12ª, XX, 1933.

88. *Le recenti indagini intorno alle ultraradiazioni*. Atti Acc. « Leonardo da Vinci ». III, Napoli, 1933.

89. *Lezioni di Fisica Terrestre. Fisica della sfera solida e della idrosfera*. II ed. (I ed., 1930). Napoli, 1934.

90. *Domenico Pacini. Necrologia*. Nuovo Cimento, XXI, 1934.

91. *I raggi cosmici*. Coelum, V, 1934.

92. *Influenza dell'atmosfera terrestre sopra l'effetto di latitudine nelle intensità della radiazione cosmica*. Rend. Acc. Naz. Lincei, XX, Ser. 6ª, 1934.

93. *Le odocrone dei movimenti sismici nelle discussioni della conferenza sismologica di Lisbona*. Boll. Soc. Sism. Ital., XXXII, 1934.

94. *La carica elettrica della Terra*. Atti della S.I.P.S., XXIV Riun. III, 1936.

95. *Il problema della carica elettrica della Terra*. La Meteorologia pratica, XVI, 1935.

96. *Domenico Pacini*. Dal vol. « In memoria di D. Pacini ». Azzoguidi, Bologna, 1936.

97. *La Meteorologia e la Geofisica nelle Colonie italiane e nell'Impero*. Atti della S.I.P.S. XXV, Riun., 1937.

98. *I rapporti su argomenti Geodetici presentati all'Assemblea Generale di Lisbona dell'Unione Intern. di Geodesia e Geofisica*. Boll. del Comitato per la Geod. e la Geof. del C.N.R., Ser. II, VII, 1937.

99. *Il generale d'armata nob. Carlo Porro*. Riv. di meteorologia, nuova serie I, 1939.

100. *I problemi fondamentali della meteorologia*. Riv. di Met. Nuova ser., I, (in due puntate), 1939.

101. *L'attività solare e le vicende atmosferiche.* Riv. di Met., Nuova ser., I, 1939.

102. *Emanuele Soler.* Riv. di Met., N. s., II, 1940.

103. *Michele Gallo.* Riv. di Met., N. s., II, 1940.

104. *Indagini antiche e recenti sui fenomeni elettrici nell'atmosfera durante i temporali.* Riv. di Met., N. s., IV, 1940.

105. *Osservazioni di elettricità atmosferica in regime temporalesco.* Rel. dattiloscritta al Com. per la Geof. e Met. del Cons. Naz. Ric., 27-XII-1940.

106. *L'ozono atmosferico.* Riv. di Met. N. s., III, 1942.

107. *Carl Dorno.* Riv. di Met., N. s., IV, 1942.

108. *Nuove ricerche sui fenomeni elettrici dell'atmosfera in regime temporalesco.* Riv. di Met. N. s., IV, 1942.

109. *Parole pronunziate nella riunione del 18 febb. 1942 della Soc. Met. Italiana.* Riv. di Met., IV, 1942.

110. *Radiazioni notturne.* Dal « Trattato di Geofisica » in corso di pubblicazione.

BIOGRAFIE E NECROLOGIE RIGUARDANTI G. B. RIZZO

Cenni sulla vita scientifica del dott. G. B. Rizzo (di G. B. Rizzo. Un. Tip Coop. Perugia, 1933).

Giovanni Battista Rizzo (di E. Maio) da « La rivista dei giovani Autori » Napoli, 1933.

Giovanni Battista Rizzo (Necrologia). « Geofisica pura e applicata », VIII, 1916.

Giovanni Battista Rizzo. Cenni bio-bibliografici (di O. de Pasquale). Atti Acc. Peloritana, XLIII-LI, 1949.

Giovanni Battista Rizzo. (Necrologia), Assoc. de Séismologie. Un. Géod. et Géoph. intern. Comptes Rendus n. 9, 1949.

Sulla determinazione della frequenza fondamentale dei sistemi solidali

Nota del dott. **Aldo Raithel**, *presentata dal socio* **A. Galli**

(Adunanza del dì 1 marzo 1952)

Sunto. — Rilevate le difficoltà inerenti agli ordinari metodi di calcolo si espone un procedimento di iterazione per il calcolo della frequenza fondamentale dei sistemi solidali e si riportano due applicazioni concrete.

Premessa. Lo studio dinamico dei sistemi solidali, benchè da tempo impostato e risolto dal lato teorico, resta ancora uno dei problemi più attuali della tecnica e della scienza per le difficoltà applicative che esso comporta e che sono superabili solo in casi particolarmente semplici.

Il procedimento di iterazione che si espone permette una soluzione rigorosa del problema dinamico permettendo, con successive approssimazioni, la determinazione della autofunzione fondamentale del sistema e della frequenza corrispondente.

Richiami di teoria. Detta $w(x, t)$ la deformata dinamica di una trave elastica l'equazione differenziale che regge le vibrazioni libere si scrive:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = -\,\mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1}$$

e la sua soluzione si persegue con la nota posizione:

$$w(x, t) = u(x)\; f(t) \tag{2}$$

mediante la quale la (1) dà luogo alle due seguenti equazioni differenziali alle derivate totali:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2 u}{dx^2}\right) = \mu\sigma^2 u \tag{3}$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \sigma^2 f = 0. \tag{4}$$

Come è noto la (3) ammette soluzione soltanto per particolari valori di σ, autovalori, e le sue soluzioni corrispondenti sono dette le autosoluzioni o autofunzioni dell'equazione differenziale.

Nei casi in cui la (3) non si sappia integrare direttamente una sua soluzione, quella corrispondente al primo autovalore, può ottenersi col metodo di iterazione; a tal fine basta confrontarla con l' equazione statica della linea elastica:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2u}{dx^2}\right)=q\,(x) \tag{5}$$

e notare che essa coincide con quest' ultima ponendo:

$$q\,(x)=\mu\sigma^2u\,(x) \tag{6}$$

per cui la soluzione del problema può perseguirsi determinando una deformata tale che assunta, a meno di $\mu\sigma^2$, come carico agente staticamente sulla trave dia luogo ad una deformata affine a quella iniziale.

Il procedimento è usuale per travi di una campata: si assegna ad arbitrio una funzione u_0, che soddisfi le condizioni di vincolo, ottenendo per la (6) un primo valore del carico che si sostituisce nella (5); si determina così con semplici integrazioni una seconda funzione u_1 e si itera successivamente il procedimento fino a quando u_{n-1} ed u_n possano ritenersi affini.

In corrispondenza di due determinazioni successive u_{i-1} ed u_i si ottiene per σ^2 il valore

$$\sigma_i^2=\frac{u_i(a)}{u_{i-1}(a)}\,\frac{EI}{l^4} \tag{7}$$

dall' eguaglianza delle frecce per la sezione di ascissa a che, per entità di massa applicata o per posizione, si ritiene la più atta a caratterizzare il comportamento dinamico del sistema.

I valori σ_i così ottenuti costituiscono una successione che per $i \to n \to \infty$ tende al valore effettivo, in pratica bastano poche iterazioni, talvolta anche una soltanto, per raggiungere una sufficiente approssimazione.

Esposizione del procedimento. In quanto segue si fa riferimento a sistemi a nodl fissi aventi caratteristiche elastiche e di inerzia costanti per ogni asta; lo studio dei telai a nodi spostabili sarà oggetto di una nota successiva.

Dato nn sistema elastico assumiamo come fondamentali le caratteristiche elastiche e di inerzia della trave cui corrisponda, per appoggi semplici agli estremi A e B, la più bassa frequenza fondamentale:

$$\sigma_0=\frac{\pi^2}{l_0^2}\sqrt{\frac{EI_0}{\mu_0}} \tag{8}$$

ed esprimiamo in funzione di l_0, μ_0, ed I_0 le corrispondenti caratteristiche della trave r^{ma}, di estremi R ed S, ponendo

$$(9) \qquad l_r = a_r l_0 \quad ; \quad \mu_r = b_r \mu_0 \quad ; \quad I_r = c_r I_0$$

Per l' asta fondamentale isolata dal resto del sistema la prima autofunzione assume la forma:

$$(10) \qquad u_0 = L \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l_0} \qquad u_0(l/2) = L$$

dove L rappresenta un' ampiezza arbitraria; il carico agente per la (6) è:

$$(11) \qquad q = \mu_0 \sigma^2 L \operatorname{sen} \frac{x}{l_0} \qquad q(l/2) = \mu_0 \sigma^2 L.$$

Ripristiniamo ora la continuità della struttura e determiniamone la corrispondente deformata u_l per la distribuzione di carico espressa dalla (11).

A tal fine calcoliamo, con i metodi usuali dei telai, i momenti agenti agli estremi di tutte le aste che potranno scriversi, per la generica campata $R\,S$, nella forma:

$$(12) \qquad M_r = K_r L \frac{l_0^2}{\pi^4} \mu_0 \sigma^2 \quad ; \quad M_s = K_s L \frac{l_0^2}{\pi^4} \mu_0 \sigma^2$$

avendo indicato con K_r e K_s due fattori numerici.

Noti quasti momenti e ricordando che la deformata di una trave semplicemente appoggiata e sollecitata nello estremo sinistro, origine delle ascisse, da una coppia unitaria può scriversi:

$$(13) \qquad u = \frac{2l^2}{\pi^3 EI} \sum \frac{I}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

siamo in grado di scrivere la deformata della campata generica. Si ha precisamente:

Campata $A\,B$.

$$(14) \qquad \begin{aligned} u_1 &= \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} L (f_1 + K_a f_2 + K_b f_3) \\ u_1(l/2) &= \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} L \left(1 + \frac{K_a + K_b}{16}\right) \end{aligned}$$

Campata $R\,S$.

$$(15)\qquad \begin{aligned} u_1 &= \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\, L\, \frac{a_r^2 b_r}{c_r}\,(K_r f_2 + K_s f_3) \\ u_1(l/2) &= \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\, L\, \frac{a_r^2 b_r}{c_r}\, \frac{K_r + K_s}{16} \end{aligned}$$

Avendo posto :

$$(16)\qquad \begin{aligned} f_1 &= \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \\ f_2 &= \sum \frac{1}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \\ f_3 &= \sum \frac{1}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi(l-x)}{l}. \end{aligned}$$

Al termine di questo primo stadio si ottiene per σ^2, eguagliando gli abbassamenti in mezzeria forniti dalla (10) e dalle (14), il valore :

$$\sigma^2 = \sigma_0^2\, \frac{1}{1 + \frac{1}{16}(K_a + K_b)}.$$

Per ottenere una seconda approssimazione si itera il procedimento assumendo come deformate di partenza quelle fornite, a meno del rapporto $\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}$, dalle (14) e (15) caricando quindi contemporaneamente tutte le campate.

Si noti che in questa e nelle successive iterazioni si opera sempre su funzioni del tipo f_1, f_2 ed f_3 perchè integrando f_1 quattro volte si ottiene, a meno di una costante, ancora f_1 ed integrando f_2 ed f_3, trascurando tutti i termini successivi al primo (il che comporta un errore massimo del 0,04%), si ha ancora f_1.

Deriva da ciò che nel generico stadio i^{mo} del procedimento la deformata di una campata potrà sempre esprimersi nella forma :

$$(17)\qquad u_i = A_i f_1 + B_i f_2 + C_i f_3.$$

Esaminando la (17) si deduce che anche eseguendo la determinazione delle σ eguagliando soltanto gli abbassamenti in mezzeria il limite cui tende σ_i è quello effettivo poichè risulta:

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \lim \sigma_i^2 = \lim \frac{u_i}{u_{i+1}} = \lim \frac{A_i}{A_{i+1}} = \lim \frac{B_i}{B_{i+1}} = \lim \frac{C_i}{C_{i+1}}$$

dovendo essere affini u_i ed u_{i+1} per $i = \infty$.

Risulta ancora utile notare che in ogni stadio della iterazione si possono calcolare tanti valori di σ^2 quante sono le travi costituenti il sistema per cui il valore effettivo del primo autovalore può essere determinato come limite comune n successioni, $n =$ numero delle travi. In pratica basta limitarsi alla sola successione relativa alla trave fondamentale, che è poi la più convergente, ed eseguire altre determinazioni solo per controllo e per rendersi conto del grado di approssimazione raggiunto.

La pratica del procedimento. Tra i metodi di soluzione dei telai atti a determinare in ogni iterazione i valori dei momenti (12) il più conforme allo spirito del procedimento che si propone è il metodo di Cross: al fine di permetterne la immediata applicazione riportiamo di seguito i valori dei momenti di incastro perfetto, per le distribuzioni di carico che interessano, unitamente alle linee elastiche fondamentali:

(*a*) $$q = q_0 f_1 \qquad q(l/2) = q_0 \,.$$

Trave incastrata ai due estremi:

$$\overline{M}_a = -\,6{,}28318 \frac{l^2}{\pi^4} q_0 = \overline{M}_b \tag{18}$$

Trave appoggiata ed incastrata:

$$\overline{M}_a = 0 \qquad \overline{M}_b = -\,9{,}42477 \frac{l^2}{\pi^4} q_0 \,. \tag{19}$$

Linea elastica della trave appoggiata:

$$u = q_0 \frac{l^4}{\pi^4 EI} f_1 \qquad u(1/2) = q \frac{l^4}{\pi^4 EI} \tag{20}$$

(*b*) $$q = q_0 \frac{32}{\pi^3} f_2 \qquad q(l/2) = q_0 \,.$$

Trave incastrata ai due estremi:

$$\overline{M}_a = -\,6{,}59193 \frac{l^2}{\pi^4} q_0 \qquad \overline{M}_b = -\,5{,}99266 \frac{l}{\pi^4} q_0 . \tag{21}$$

Trave appoggiata ed incastrata:

$$\overline{M}_a = 0 \qquad \overline{M}_b = -\,9{,}58826 \frac{l^2}{\pi^4} q_0 \tag{22}$$

linea elastica della trave appoggiata:

$$(23) \qquad u = q_0 \frac{l^4}{\pi^4 EI} \frac{32}{\pi^3} f_2 \qquad\qquad u(1/2) = 1{,}03153 \frac{l^4}{\pi^4 EI}$$

La pratica del procedimento è ulteriormente chiarita degli esempi numerici che seguono.

Esempi numerici.

I) Trave a sezione costante continua su due luci l e 0,6 l come in fig. 1 dove sono riportati i coefficienti di ripartizione per l'applicazione del metodo di Cross.

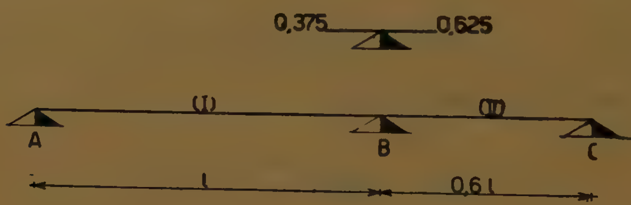


Fig. 1.

Si sceglie come fondamentale la campata (I) per cui

$$\sigma_0 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

e la campata (II) resta definita dai parametri:

$$a = 0{,}6\,; \qquad\qquad b = c = 1.$$

Assumiamo per la campata $A\,B$:

$$u_0 = 1\, f_1 \qquad\qquad u_0(l/2) = 1$$

ed iniziamo il procedimento notando che conviene operare a meno di inessenziali costanti o funzioni per cui nello scrivere i valori dei momenti ci riferiremo al solo fattore K e nello scrivere le espressioni delle linee elastiche ci riferiremo alle sole frecce in mezzeria.

1ª iterazione.

Dalla 19 si ha $\overline{K}_{ba} = -9{,}42477$ mentre $K_{bc} = 0$ essendo scarica la seconda campata in questa prima fase. Dall'equilibramento in B si ottiene:

$$K_b = -9{,}42477 \;\, 0{,}625 = -5{,}89048$$

per cui gli abbassamenti in mezzeria risultano:

$$u_{ab} = 1 - \frac{5,89048}{16} = \cdot - 0,36815 = 0,63185$$

$$u_{bc} = - a^2 \frac{5,89048}{16} = - 0,13253.$$

Confrontando la freccia ottenuta per la prima campata con quella assegnata, unitaria, si ha:

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 \frac{1,00000}{0,63185} = 1,58265\ \sigma_0^2$$

2ª iterazione.

Il momento d'incastro perfetto per la prima campata risulta, v. (19) e (22):

$$K_{ba} = - 9,42477\ 1 + 9,58826\ 0,36815 = - 5,89425$$

e per la seconda:

$$\overline{K}_{bc} = - 9,58826\ (-0,13253)\ a^2 = 0,45746.$$

Equilibrando il nodo si ha:

$$K_b = - 5,89485\ 0,625 + 0,45746\ 0,375 = - 3,51273$$

e le frecce, v. (20) e (23), sono:

$$u_{ab} = 1 - 1,03153\ 0,36815 - \frac{3,51273}{16} = 0,62024 - 0,21954 = 0,40070$$

$$u_{bc} = -1,03153\ a^4\ 0,13253 - \frac{3,51273}{16}\ a^2 = -0,01773 + 0,07903 = -0,09676.$$

Si calcolano allora per la frequenza i due valori

$$\sigma^2 = \frac{0,63185}{0,40070}\ \sigma_0^2 = 1,57686\ \sigma_0^2$$

$$\sigma^2 = \frac{0,13253}{0,09676}\ \sigma_0^2 = 1,36967\ \sigma_0^2$$

3ª iterazione.

Operando analogamente si hanno i due seguenti valori

$$\sigma^2 = 1,56848\ \sigma_0^2$$

$$\sigma^2 = 1,54445\ \sigma_0^2$$

4ª iterazione.

$$\sigma^2 = 1{,}56739\ \sigma_0^2$$
$$\sigma^2 = 1{,}56429\ \sigma_0^2.$$

Dato che gli ultimi due valori sono praticamente coincidenti resta individuata la frequenza effettiva del sistema.

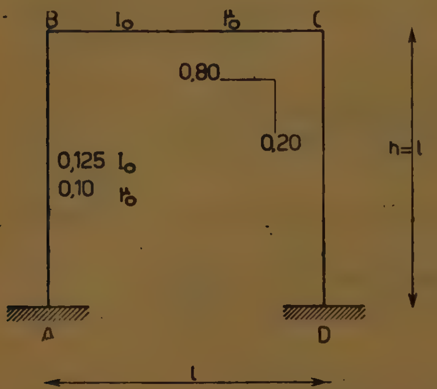


Fig. 2.

II) Determinazione della frequenza di vibrazione, verticale, di un portale semplice. Nello schema di fig. 2 sono riportate le caratteristiche delle aste, eguali per i due ritti. Nella ricerca di σ^2 si è assunta come asta fondamentale il traverso e, per la simmetria, si sono limitati i calcoli a metà struttura.

1ª iterazione.

Il solo momento d'incastro perfetto diverso da zero è $\overline{K}_{bc} = 6{,}28318$ e ad equilibramento effettuato si ha:

$$K_b = -1{,}25664 \qquad K_a = +0{,}62832$$

per cui risulta:

$$u_{bc} = 1 - \frac{1{,}25664}{16}\,2 = 1 - 0{,}15708 = 0{,}84292$$

$$u_{ab} = \frac{-1{,}25664 + 0{,}62832}{16} = -0{,}62832 + 0{,}31416 = -0{,}31416.$$

Dall'eguaglianza delle frecce, quella unitaria iniziale e quella ottenuta, per il traverso si ha

$$\sigma^2 = \frac{1{,}00000}{0{,}84292}\,\sigma_0^2 = 1{,}18635\ \sigma_0^2$$

2ª iterazione.

Calcolo dei momenti d'incastro perfetto:

$$\overline{K}_{ab} = [-0{,}62832\,(-5{,}99266) + 0{,}31416\,(-6{,}59193)] \cdot \frac{1}{10} = 0{,}16945$$

$$K_{ba} = [0{,}31416\,(-5{,}99266) - 0{,}62832\,(-6{,}59193)] \cdot \frac{1}{10} = 0.22591$$

$$K_{bc} = -6{,}28318 - 0{,}15708\,\frac{-5{,}99266 - 6{,}59193}{2} = -5{,}29479.$$

Eseguito l' equilibramento si è ottenuto:

$$K_b = -\,0{,}87923 \qquad K_a = +\,0{,}72152$$

e quindi:

$$u_{bc} = 1 - 0{,}15708 + 1{,}03153 - \frac{0{,}87823}{16}\,2 = 0{,}83797 - 0{,}10978 = 0{,}72819$$

$$u_{ab} = \frac{8}{10}\,1{,}03153 + 0{,}31416 + 8\,\frac{-0{,}87823 + 0{,}72152}{16} = -\,0{,}25925 - \\ -\,0{,}43911 + 0{,}36076 = -\,0{,}33760$$

ottenendo per σ^2 la coppia di valori:

$$\sigma^2 = \frac{0{,}84292}{0{,}72819}\,\sigma_0^2 = 1{,}15755\ \sigma_0^2$$

$$\sigma = \frac{0{,}31426}{0{,}33760}\,\sigma_0^2 = 0{,}93051\ \sigma_0^2$$

3ª iterazione.

$$\sigma^2 = 1{,}14858\ \sigma_0^2$$
$$\sigma^2 = 1{,}12387\ \sigma_0^2$$

4ª iterazione.

$$\sigma^2 = 1{,}14743\ \sigma_0^2$$
$$\sigma^2 = 1{,}14722\ \sigma_0^2.$$

Dagli esempi precedenti si nota come in ambedue i casi quattro iterazioni sono state sufficienti ad individuare il valore effettivo di σ^2. Conviene però osservare che già il primo valore è praticamente accettabile dando, nei due casi rispettivamente, σ^2 con uno scarto, che risulta sempre in eccesso, dell' 1,1% e del 3,4%.

Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni, ottobre 1951.

Approssimazione di una funzione su una superficie

Nota del dott. **Guido Stampacchia** *presentata dal socio* **Carlo Miranda**

(Adunanza del dì 5 aprile 1952)

Sunto. — Scopo di questa Nota è di indicare come si possa approssimare una funzione su di una assegnata superficie Γ mediante una successione di polinomi in tre variabili. I polinomi che si considerano differiscono dagli ordinari polinomi di Stieltjes [1]) in quanto le integrazioni che vi intervengono sono estese alla superficie Γ. Il tipo di convergenza, come accade nel caso ordinario. dipende dalla natura della funzione che si vuole approssimare e la convergenza è assicurata nell'interno di Γ se questa è aperta e su Γ se questa è una superficie chiusa.

Queste considerazioni si estendono in modo ovvio agli spazi a più dimensioni e possono riuscire utili in questioni di Analisi; ad esse sono stato condotto per ottenere una attenuazione di ipotesi sui dati in problemi al contorno per equazioni differenziali a derivate parziali di tipo ellittico [2]).

1. Sia Γ una superficie limitata [3]), dotata in ogni punto di piano tangente e inoltre tale che si possa determinare un numero τ in modo che qualunque sia il punto P di Γ, la porzione $\Gamma_\tau(P)$ di Γ contenuta nella sfera $S(P, \tau)$ rispetto ad sistema di assi coordinati con l'origine in P e l'asse z sulla retta normale a Γ in P, sia suscettibile di una rappresentazione del tipo:

$$z = z(x, y)$$

con $z(x, y)$ funzione definita e continua nel dominio $A_\tau(P)$, proiezione di $\Gamma_\tau(P)$ sul piano tangente $z = 0$, ivi dotata di derivate prime continue;

---

[1]) Per l'esposizione dei principali risultati e per le indicazioni bibliografiche cfr. G. Sansone; *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale,* parte seconda (IIª edizione), Bologna (1946), pp. 340-350. Per quanto riguarda la definizione dei polinomi di Stieltjes in più variabili preferiamo qui quella di L. Tonelli (cfr. Rend. Circolo Matematico di Palermo, to. XXIX, 1910, pp. 1 30) a quella di Ch.-J. de la Vàllée Poussin (cfr. *Cours d'Analyse Infinitésimale,* to. II (1912), pp. 133-137), perchè più intrinseca.

[2]) *Problemi al contorno per equazioni di tipo ellittico a derivate parziali e questioni di calcolo delle variazioni connesse.* In corso di stampa in Annali di Matematica.

[3]) La supporremo senz'altro interna alla sfera di centro l'origine degli assi e di raggio unitario.

diremo allora che Γ è una superficie di *classe 1*; diremo invece Γ è di *classe 2* se la funzione $z(x, y)$ è dotata in $A_\tau(P)$ anche di derivate seconde continue.

Sia $\varphi(P)$ una funzione definita su Γ ed ivi continua. Posto:

$$\frac{1}{k_n} = \int_C (1-u^2-v^2)^n \, du\, dv$$

essendo C il cerchio: $u^2+v^2 \leq 1$, consideriamo, per ogni n, il polinomio di grado $2n$:

$$\Phi_n(x, y, z) = \Phi_n(P) = k_n \int_\Gamma \varphi(Q)\,(1-\overline{PQ}^2)^n \, d_Q\sigma \tag{1}$$

ove $\overline{PQ}$ indica la distanza dal punto P dal punto Q variabile e $d_Q\sigma$ l'elemento d'area di Γ.

Se il punto P appartiene a Γ, si deduce immediatamente che:

$$\lim_{n \to +\infty} \Phi_n(P) = 0.$$

Dimostriamo ora che: *supposta la superficie Γ di classe 1 e $\varphi(P)$ continua, in ogni punto P che non appartiene al bordo di Γ (e quindi ovunque se Γ è chiusa), si ha:*

$$\lim_{n \to +\infty} \Phi_n(P) = \varphi(P). \tag{2}$$

Fissato ad arbitrio un numero $\sigma > 0$, determiniamo in corrispondenza un numero $\delta > 0$ $(\delta < \tau)$ in modo che per tutti i punti (x, y) del piano π, tangente in P a Γ, tali che $x^2+y^2 < \delta^2$, si abbia:

$$\left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| < \sigma \quad , \quad \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| < \sigma \tag{3}$$

donde:

$$|z(x, y)| < \sigma(|x| + |y|). \tag{4}$$

Fissato δ in tal modo indichiamo con $\Gamma_\delta(P)$ la porzione di Γ contenuta nella sfera $S(P, \delta)$ di centro P e raggio δ e scriviamo:

$$(5)\qquad \left| \Phi_n(P) - k_n \int_{\Gamma_\delta(P)} \varphi(Q)\,(1-\overline{PQ}^2)^n d_Q\sigma \right| \leq k_n \int_{\Gamma-\Gamma_\delta(P)} |\varphi(Q)|\,(1-\overline{PQ}^2)^n d_Q\sigma \leq$$
$$\leq k_n\,(1-\delta^2)^n \int_\Gamma |\varphi(Q)|\, d_Q\sigma.$$

D' altra parte si può scrivere:

$$(6)\qquad \int_{\Gamma_\delta(P)} \varphi(Q)(1-\overline{PQ}^2)^n d_Q\sigma = \int_{A_\delta(P)} \varphi(x\,,y\,,z(x\,,y))\,(1-x^2-y^2-$$
$$-|z(x\,,y)|^2)^n \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy = \int_{A_\delta(P)} \varphi(x\,,y\,,z(x\,,y))\,(1-x^2-y^2)^n\,dx\,dy +$$
$$+ \int_{A_\delta(P)} \varphi(x\,,y\,,z(xy))\,\left\{(1-x^2-y^2-|z(x,y)|^2)^n \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} - (1-x^2\;\;y^2)^n\right\} dxdy$$

essendo $A_\delta\,(P)$ la proiezione di $\Gamma_\delta\,(P)$ sul piano π.

Tenendo conto delle (3), (4), si deduce che in $A_\delta\,(P)$, si ha [1]:

$$(7)\quad \left|(1-x^2-y^2-[z(x,y)]^2)^n \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y} - (1-x^2-y^2)^n\right| \leq 2\sigma^2 \Big|(1-x^2-y^2)^n +$$
$$+ n\,(x^2+y^2)\,(1-x^2-y^2)^{n-1}\,(1+2\sigma)\Big|$$

donde per (5), (6), (7) detto M il massimo modulo di $\varphi\,(P)$ su Γ ed S l' area di Γ, si ha:

$$(8)\qquad \left|\Phi_n\,(P) - k_n \int_{A_\delta(P)} \varphi\,(x,y,z\,(x,y))\,(1-x^2-y^2)^n\,dx\,dy\right| \leq MS\,k_n(1-\delta^2)^n +$$
$$+ 2M\sigma k_n \int_{A_\delta(P)} (1-x^2-y^2)^n dx\,dy + M\sigma^2\,(1+2\sigma)\,k_n \int_{A_\delta(P)} n\,(x^2+y^2)\,(1-x^2-y^2)^{n-1}\,dx\,dy.$$

Il primo addendo del secondo membro, tenendo presente che [2]:

$$(9)\qquad \frac{4}{\pi}(n+1) < k_n < \frac{4}{\pi}\,\frac{n+1}{1-\frac{1}{2^{n+1}}}$$

---

[1]) Si ha infatti:

$$\left|(1-x^2-y^2-z^2)^n \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y} - (1-x^2-y^2)^n\right| \leq \left|\frac{(1-x^2-y^2)^n}{2}\max(|z'^2_x|+|z'^2_y|) +\right.$$
$$+ n\,(1-x^2-y^2)^{n-1}\,(1+2)\max\,(|z'_x|\;,\;|z'_y|)\max|z^2|$$

[2]) L. Tonelli, *Loc. cit.*, n. 6, p. 7.

tende a zero per $n \to +\infty$; il secondo risulta ovviamente minore di $2M\sigma^2$, in quanto al terzo, un semplice calcolo mostra che:

$$\int\limits_{A_\delta(P)} n(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)^{n-1}dx\,dy \leq 4\pi n \int\limits_0^\delta \rho^3(1-\rho^2)^{n-1}d\rho \leq 4\pi\left[\delta^2(1-\delta^2)^n+\frac{2}{n+1}\right]$$

e pertanto, tenendo ancora presente la (9), esso risulta maggiorato da $L\sigma^2$ con $L>0$.

Quindi, per n sufficientemente grande, si ha:

$$\left|\Phi_n(P)-k_n\int\limits_{A_\delta(P)}\varphi(x,y,z(x,y))\,(1-x^2-y^2)^n\,dx\,dy\right|<h\sigma \qquad (h>0). \tag{10}$$

Ma $k_n\int\limits_{A_\delta(P)}\varphi(x,y,z(x,y))(1-x^2-y^2)^n\,dx\,dy$ è il valore nel punto $(0,0)$ dell' n^{mo} poliinomio di Stieltjes della funzione $\varphi(x,y,z(x,y))$ in $A_\delta(P)$ e quindi per noti risultati [1]) tende a $\varphi(0,0,z(0,0))=\varphi(P)$.

La convergenza di $\Phi_n(P)$ è evidentemente uniforme in ogni insieme chiuso interno a Γ e, se quest' ultima è chiusa, in Γ.

2. Supponiamo ora che la funzione $\varphi(P)$ sia sommabile su Γ; in tale ipotesi sono ancora definiti su Γ le funzioni Φ_n mediante la (1). Prima di procedere oltre osserviamo che è possibile determinare [2]) un insieme E di misura nulla su Γ tale che se P non appartiene ad E si ha:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int\limits_{\Gamma_\varepsilon(P)}|\varphi(Q)-\varphi(P)|\,d_Q\sigma}{area\ \Gamma_\varepsilon(P)}=0. \tag{11}$$

Infatti, detta: $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ una rappresentazione regolare di un intorno di un punto P su Γ, questa fa corrispondere al bordo di $\Gamma_\varepsilon(P)$ una curva la quale è molto prossima all' ellisse di equazione:

$$E_0(u-u_0)^2+2F_0(u-u_0)(v-v_0)+G_0(v-v_0)^2=\varepsilon^2$$

ove (u_0, v_0) è il punto corrispondente a P ed E_0, F_0, G_0 sono i noti coef-

---

[1]) L. Tonelli, *Loc. cit.*, n. 10, pp. 9-14.

[2]) In ogni insieme chiuso di Γ che non abbia punti in comune col bordo di Γ, se Γ è aperta.

ficienti della prima forma differenziale della superficie calcolati in (u_0, v_0). Si deduce che, indicato con $R_\varepsilon(P)$ l'insieme dei punti (u, v) corrispondenti ai punti di $\Gamma_\varepsilon(P)$, la famiglia degli insiemi $R_\varepsilon(P)$ ha in (u_0, v_0) un parametro di regolarità [1]) fornito dal rapporto degli assi delle ellissi suddette. Allora, essendo:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\displaystyle\int_{\Gamma_\varepsilon(P)} |\varphi(Q)-\varphi(P)| d_Q\sigma}{\text{area } \Gamma_\varepsilon(P)} =$$

$$= \frac{1}{J(u_0, v_0)} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\displaystyle\int_{R_\varepsilon(P)} |\varphi(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) - \varphi(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))| \, |J(u,v)| \, du dv}{\text{area } A_\varepsilon(P)}$$

ove $J(u, v) = \sqrt{EG-F^2}$, si deduce quanto asserito [2].

Premesso ciò un ragionamento analogo a quello fatto al n. 1 permette di dimostrare che:

Supposta Γ di classe 1 e $\varphi(P)$ misurabile e limitata su Γ, per quasi tutti i punti di Γ, si ha la (2).

La stessa conclusione sussiste se $\varphi(P)$ é soltanto sommabile su Γ.

Infatti, come al n. 1, si giunge alla maggiorazione:

$$(8') \left| \Phi_n(P) - k_n \int_{A_\delta(P)} \varphi(x, y, z(x, y)) (1-x^2-y^2)^n \, dx\, dy \right| \leq k_n (1-\delta^2)^n \int_\Gamma |\varphi(P)| d\sigma +$$

$$+ \left| k_n \varphi(0, 0, 0) \int_{A_\delta(P)} \left\{ (1-x^2-y^2-|z(x, y)|^2)^n \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y} - (1-x^2-y^2)^n \right\} dx dy \right| +$$

$$+ k_n \int_{A_\delta(P)} \Big| [\varphi(x, y, z(x, y)) - \varphi(0, 0, 0)] \Big\{ (1-x^2-y^2-|z(x,y)|^2)^n \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y} -$$

$$- (1-x^2-y^2)^n \Big\} dx\, dy \Big| .$$

I primi due integrali del secondo membro si maggiorano come precedentemente per modo che definitivamente risultano minore di $h\sigma$ $(h>0)$.

---

[1]) Cfr. Ch. J. de la Vallée Poussin, *Integrales de Lebesgue, ecc. ecc*, Paris, (1934), p. 64.

[2]) Cfr. G. Fichera, *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni.* Annali di Matematica, serie IV, to. XXVII (1948), § 1, teor. III.

Introdotto sul piano tangente a P un sistema di coordinate polari col polo in P e posto:

$$F(\rho, \delta) = |\varphi(Q) - \varphi(P)|$$

$$\psi(\delta) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\delta} F(\rho, \vartheta)\rho \, d\rho \, d\vartheta,$$

se P è fuori di E, per quanto abbiamo detto al principio di questo numero, si ha:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\psi(\delta)}{\delta^2} = 0 \tag{12}$$

e inoltre:

$$\psi'(\delta) = \delta \int_0^{2\pi} \varphi(\delta, \vartheta) \, d\vartheta.$$

Fissato [1] allora δ così piccolo in modo che: $\psi(\delta) \leq \sigma \delta^2$, il terzo addendo del secondo membro della (8′) risulta, per $\sigma < 1$, minore di:

$$\sigma^2 k_n \int_{A_\delta(P)} F(\rho,\vartheta)\left[(1-\rho^2)^n + 3n\rho^2(1-\rho^2)^{n-1}\right]\rho \, d\rho \, d\vartheta \leq \sigma^2 k_n \int_0^{\delta} \psi'(\rho)\left[(1-\rho^2)^n + 3n\rho^2(1-\rho^2)^{n-1}\right] d\rho$$

$$\leq \sigma^2 k_n \psi(\delta)\left[(1-\delta^2)^n + 3n\delta^2(1-\delta^2)^{n-1}\right] + 2\sigma^3 k_n \int_0^{\delta}\left[4n\rho^3(1-\rho^2)^{n-1} +\right.$$

$$\left. + 3n(n-1)\rho^5(1-\rho^2)^{n-2}\right] d\rho$$

$$\leq \sigma^3 k_n \delta\left[(1-\delta^2)^n + 3n\delta^2(1-\delta^2)^{n-1}\right] + 2\sigma^3 k_n\left[4\delta^2(1-\delta^2)^n + \frac{10}{n+1} + 3n\delta^4(1-\delta^2)^{n-1} + 24\frac{(1-\delta^2)^{n+1}}{n+1}\right]$$

e pertanto di $h'\sigma$ $(h' > 0)$.

Quindi, per ogni punto P fuori di E, si ha:

---

[1]) Cfr. *Loc. cit.* alla nota precedente.

$$\lim_{n\to+\infty}\Phi_n(P)=\lim_{n\to\infty}\int_{A_\delta(P)}\varphi(x,y,z(x,y))(1-x^2-y^2)^n\,dx\,dy$$

sempre che esista il limite a secondo membro; ma da risultati noti [1]) si sa che ciò avviene se:

$$(13)\qquad \lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon\int_0^\varepsilon|\varphi(x,y,z(x,y))-\varphi(0,0,0)|\,dx\,dy=0$$

e inoltre vale la (2). Ora la relazione (13) vale di certo nei punti P che non appartengono ad E e quindi la proposizione enunciata è dimostrata.

Se inoltre $\varphi(P)$ è sommabile su Γ con $|\varphi(P)|^\alpha$ $(\alpha>1)$ gli integrali:

$$\int_\Gamma|\Phi_n(P)|^\alpha\,d\sigma$$

sono limitabili mediante l' integrale: $\int_\Gamma|\varphi(P)|^\alpha\,d\sigma.$

3. Calcoliamo ora la derivata di $\Phi_n(x,y,z)$ in una direzione tangente a Γ e pertanto fissato un sistema di assi come precedentemente e in modo che l' asse x coincida con la direzione fissata, si ha:

$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial x}=k_n\int_\Gamma\varphi(Q)\frac{\partial}{\partial x}\left(1-\overline{PQ}^2\right)^n d_Q\sigma=k_n\int_{\Gamma_\delta(P)}\varphi(Q)\frac{\partial}{\partial x}\left(1-\overline{PQ}^2\right)^n d_Q\sigma+$$

$$+k_n\int_{\Gamma-\Gamma_\delta(P)}\varphi(Q)\frac{\partial}{\partial x}\left(1-\overline{PQ}^2\right)^n d_Q\sigma.$$

Allora:

$$\left|\frac{\partial\Phi_n(P)}{\partial x}-2n\,k_n\int_{A_\delta(P)}\varphi(x,y,z(x,y))x(1-x^2-y^2-|z(x,y)|^2)^{n-1}\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dx\,dy\right|\leq$$

$$\leq 2n\,k_n(1-\delta^2)^{n-1}\int_\Gamma|\varphi(Q)|\,d_Q\sigma$$

---

[1]) L. Tonelli, *Loc. cit.* p. 15-16, pp. 16-19.

è ancora:

$$(14)\qquad \left|\frac{\partial\Phi_n(P)}{dx}-k_n\int_{A_\delta(P)}\varphi(x\,,y\,,z(x,y)\;2nx(1-x^2-y^2)^{n-1}dxdy\right|\leq$$

$$\leq 2nk_n(1-\delta^2)^{n-1}\int_\Gamma|\varphi(Q)d\sigma+2nk_n\int_{A_\delta(P)}\varphi(x,y,z(x,y))\,\Big|(1-x^2-y^2-$$

$$-\;|z(x,y)|^2)^{n-1}\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}-(1-x^2-y^2)^{n-1}\Big|x\,dx\,dy.$$

A questo punto si dimostra che:

Supposta la superficie Γ *di classe 2 e la funzione* φ *(P) appartenente alla classe* $\mathcal{A}$ [1]) *(in particolare assolutamente continua secondo Tonelli) rispetto ai parametri locali di* Γ, *per quasi tutti i punti di* Γ, *si ha:*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\partial\,\Phi_n}{\partial\,r}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Infatti come al n. 2 si dimostra che il secondo addendo del secondo membro risulta definitivamente minore di $h\sigma$ $(h>0)$ in quasi tutti i punti di Γ, d' altra parte l' integrale

$$k_n\int_{A_\delta(P)}\varphi\,(x\,,y\,,z\,(x\,,y))\;2nx(1-x^2-y^2)^{n-1}dx\,dy$$

tende, [2]) per quasi tutti i punti di P, a $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$.

Concludiamo poi osservando che *supposta inoltre la funzione* φ *(P) appartenente alla classe* $\mathcal{A}^\alpha$ $(\alpha>1)$ [1]) *gli integrali:*

$$\int_\Gamma\left|\frac{\partial}{\partial x}\Phi_n(P)\right|^\alpha d\sigma$$

sono limitabili mediante l' integrale: $\displaystyle\int_\Gamma\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^\alpha d\sigma.$

---

[1]) Ricordiamo che una funzione $f\,(x\,,y)$ appartiene alla classe $\mathcal{A}$ se essa è assolutamente continua rispetto alle variabili per quasi tutti i valori dell' altra e le derivate prime sono sommabili. Cfr.: G. Stampacchia, *Sopra una classe di funzioni in due variabili ecc. ecc.* Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. 79 (1950), pp. 169 208.

[2]) *Loc. cit.* alla nota precedente.

Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie di indice n dell' S_r proiettivo complesso

Nota IX del socio ordinario Nicolò Spampinato

(Adunanza del dì 5 aprile 1952)

Sunto. – Si dimostra che le cinque funzioni che intervengono nelle cinque determinazioni, introdotte nelle note [1]) precedenti, di una W_{k-1} di indice di algebricità n, in particolare ideale, virtuale o ordinaria, di una V_k algebrica della S_r proiettivo complesso, sono invarianti, oltre che per trasformazioni proiettive, anche per *trasformazioni corpoproiettive*.

Di una tale W_{k-1} si assegna ora una *determinazione birazionale*, in relazione alla determinazione birazionale della V_k introdotta nella nota precedente, associando ad un insieme E_{-1} di *elementi*, cioè di punti o di sostegni di varietà unirazionali di dimensione $\leq k-1$, una funzione, definita nell'insieme $V_k(O_h, O)$ delle *coppie origine-falda k-dimensionale* della V_k, che risulta *invariante per trasformazioni birazionali* della V_k in una V_k', ed è:

a) ad un valore intero non negativo, nel caso *ordinario*,

b) ad un valore intero relativo, nel caso *virtuale*,

c) ad n valori razionali relativi eguali, nel caso *ideale*,

d) ad n valori razionali relativi, nel caso *generale*.

Con tale funzione, invariante per trosformazioni birazionali, e con la relativa funzione media, vengono introdotte quelle che diremo *le* n *sottomultiplicità di intersezione birazionali, e la multiplicità d'intersezione birazionale,* di una ipersuperficie generale, o ideale, o virtuale, o ordinaria, con una falda k-dimensionale di V_k, nella sua origine h-dimensionale ($h < k$).

54 *Gruppo delle corpoproiettività dell' S_r proiettivo complesso e teorema relativo.*

Rappresentato l' S_r proiettivo complesso sulla congruenza di rette reali dell' S_{2r+1} appoggiate a due S_r immaginari coniugati indipendenti (I[a] rappresentazione) una corpoproiettività dell' S_r è per definizione (caso particolare

---

[1]) N. Spampinato, *Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice* n *dell' S_r proiettivo complesso*. (Rend. Acc. delle Scienze, Napoli, Vol.i XIV, ..., XVIII, 1946, ..., 1951). Le proprietà preannunciate nelle note I, II, III, IV, V, VI sono dimostrate nei Vol.i III e VI delle mie *Lezioni di Geometria superiore*, Casa editrice Pironti, Napoli, Via Mezzocannone.

La presente nota si inizia col n° 54, facendo sèguito alla numerazione delle otto note precedenti, da 1 a 53.

di una definizione generale nel caso ipercomplesso) una trasformazione rappresentata sulla congruenza dalla corrispondenza subordinatavi da una proiettività reale dell' S_{2r+1} che la trasforma in sè stessa.

Fra le corpoproiettività trovasi la trasformazione *coniugio*.

Le trasfarmazioni prodotto delle proiettività per il coniugio, cioè le antiproiettività, sono tutte e sole le corpoproiettività distinte dalle proiettività.

Ciò premesso sia V_{r-1} una ipersuperficie algebrica di S_r e P un suo punto s-plo. Si ha allora che

I) *Ogni corpoproiettività* σ *di* S_r *trasforma* V_{r-1} *in una ipersuperficie dello stesso ordine,* V'_{r-1}.

II) *Il punto* P' *omologo di* P *per la* σ *ha per* V'_{r-1} *la stessa multiplicità* s *che ha* P *per la* V_{r-1}.

Infatti essendo σ una corpoproiettività essa o è una proiettività o è una antiproiettività, e quindi il prodotto di una proiettività e della trasformazione coniugio. Per tali trasformazioni le proposizioni I) e II) sono vere, sicchè si ha che: *il concetto di multiplicità in un punto di una ipersuperficie algebrica ordinaria è invariante per trasformazioni corpoproiettive.*

Sia data, ora, nell' S_r una ipersuperficie algebrica W_{r-1} di indice di algebricità qualunqne, in particolare (virtuale o ideale) rispondente alla n-pla ordinata di ipersuperficie ordinarie $(V^{(1)}_{r-1}, \ldots, V^{(n)}_{r-1})$ con il sostegno J_{r-1} somma dei sostegni della prima ed ultima ipersuperficie della n-pla; e la funzione numerica $N(X)$, ad n valori razionali relativi data da:

$$N(X) = \Phi\,[N^{(1)}(X), \ldots, N^{(n)}(X)]$$

avendo posto

$$V^{(j)}_{r-1} = \left| J^{(j)}_{r-1}\ ,\ N^{(j)}(X) \right| \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

nel n. 19 abbiamo dimostrato che la funzione $N(X)$ che dà le n sottomultiplicità di W_{r-1} in un punto X, e quindi la loro media aritmetica, che dà la multiplicità di W_{r-1} in X, è invariante per trasformazioni proiettive dell' S_r. Ciò dipende dal fatto che gli n valori razionali relativi assunti dalla $N(X)$ in un punto X dipendono dalle $n+1$ moltiplicità in X delle rispettive $n+1$ ipersuperficie ordinarie $V^{(r-1)}_{r-1}$. Tenendo conto delle osservazioni fatte nel n. precedente segue che:

III) La funzione numerica N(X) *che dà le* n *sottomultiplicità in* X *di una* W_{r-1}, *di indice di algebricità* n, *è invariante per trasformazioni corpoproiettive.*

In modo analogo si dimostra che

IV) *La funzione numerica media* M(X) *che dà la multiplicità in* X *di una* W_{r-1}, *di indice di algebricità* n, *in particolare ideale, o virtuale, è invariante per trasformazioni corpoproiettive.*

NOTA. I teoremi III) e IV) si estendono alle W_{k-1} di una V_k.

55. *Multiplicità d' intersezione birazionale di una ipersuperficie* V_{r-1} *con una falda* t-*dimensionale nell' origine* O_h *della falda.*

Sia data nell' S_r proiettivo complesso una ipersuperficie V_{r-1} ordinaria di equazione

$$f(x_1, \ldots, x_{r+1}) = 0 \tag{1}$$

ed una falda t-dimensionale di equazioni

$$x_j = \sum_{h_1 \ldots h_t}^{0 \ldots \infty} b^{(j)}{}_{h_1 \ldots h_t} \, z_1^{h_1} \ldots z_t^{h_t} \tag{2}$$

con l' origine O_h (n. 49 della nota VIII).

Volendo considerare la falda ρ_t di equazioni parametriche (2) come semplice insieme di punti, possiamo dividere le (2) per ogni enentuale fattore, comune a tutte le $r+1$ serie, che sia una potenza di uno dei parametri z_i. Ciò premesso sostituiamo nella forma $f(x_j)$ le (2). Si otterrà una serie di potenze nelle t variabili complesse z_i, $F(z_1, \ldots, z_t)$.

Indichiamo con $G(z_1, \ldots, z_t)$ la serie di potenze ottenuta dalla serie $F(z_i)$ dividendola per ogni eventuale potenza di una z_i che sia a fattore di tutti i termini della serie. Se l' esponente all' origine della falda ρ_t, diciamo s_0, è maggiore di zero, e diciamo m il grado della forma $f(x_j)$, la $F(z_i)$ risulterà divisibile certamente per potenze delle z_i perchè i termini di grado minimo risulteranno di grado ms_0 almeno, e di tale grado nel caso generico. Ecco perchè nel definire la *multiplicità d' intersezione della* V_{r-1} *con la falda* considerata nel n. 52, *abbiamo sottratto da tale grado minimo il numero* ms_0. Tale multiplicità d' intersezione risulta, come abbiamo osservato, invariante per trasformazioni proiettive e, più in generale, corpoproiettive, di una V_t algebrica, di S_r dove si fa variare la falda ρ_t per avere la determinazionale di detta V_t. Si è potuto così pervenire ad una *determinazione proiettiva* e *corpoproiettiva* della V_{t-1} intersezione della V_t con la data ipersuperficie V_{r-1}. Ma volendo pervenire ad una *determinazione birazionale* di una tale V_{t-1} della V_t, occorre definire una multiplicità d' intersezione della V_{r-1} con la falda ρ_t nell' origine O_h della falda (con $h \geq 0$) che sia invariante per trasformazione birazionale, *per punti*, della V_t dove si fa dopo variare la falda ρ_t, e *per ipersuperficie*,

della V_{r-1}. A tal fine diremo *multiplicità d' intersezione birazionale* della V_{r-1} con la ρ_t il grado minimo dei termini della serie $G(z_i)$ ottenuta dalla serie $F(z_i)$ dopo averla divisa per ogni eventuale potenza di una z_i. Tale multiplicità d' intersezione birazionale della V_{r-1} con la falda ρ_t risulterà perciò $\geqq$ della multiplicità d' intersezione nell' origine O_h definita nel n. 52. Questa si dirà, pertanto, *multiplicità d' interrezione corpoproiettiva, in particolore proiettiva.*

Se V_t' è la trasformata birazionale della V_t di S_r, mediante una trasformazione birazionale fra V_t e V_t', di equazioni, dirette ed inverse,

$$(3) \qquad x_s' = f_s(x_1, \ldots, x_{r+1}) \qquad (s = 1, \ldots, r' + 1)$$

$$(4) \qquad x_j = g_j(X_1', \ldots, x'_{r'+1}) \qquad (j = 1, \ldots, r + 1)$$

e ρ_t' è la falda t-dimensionale di V_t', di equazioni

$$(2') \qquad x_s' = \sigma_s(z_1, \ldots, z_t) \qquad (s = 1, \ldots, r' + 1)$$

essendo le $\sigma_s(z_i)$ le serie ottenute sostituendo nelle (3) le (2), e divise per ogni eventuale fattore, comune a tutte le $r' + 1$ serie, che sia una potenza di uno dei parametri z_i, e se $V'_{r'-1}$ e la ipersuperficie di $S'_{r'}$, ambiente della V_t', trasformata per ipersuperficie della detta trasformazione birazionale, cioè la ipersuperficie di $S'_{r'}$ di equazione

$$(1') \qquad f(g_j(x_1', \ldots, x'_{r'+1})) = 0,$$

la multiplicità d' intersezione birazionale della $V'_{r'-1}$ con la falda ρ_t' risulta eguale alla multiplicità d' intersezione birazionale della V_{r-1} con la falda ρ_t. Infatti per determinare tale multiplicità d' intersezione birazionale occorre considerare la serie ottenuta dalla forma a primo membro della (5) sostituendo alle x_s' le serie $\sigma_s(z_1, \ldots, z_t)$ e dividere tale serie per ogni eventuale potenza di una z_i. La serie così ottenuta dal primo membro della (1') e dalle (2') sarà la stessa serie ottenuta dal primo membro della (1) e dalla (2), cioè la serie $G(z_1, \ldots, z_t)$; il cui grado minimo dei suoi termini dà per definizione la multiplicità d' intersezione birazionale in questione.

Resta così giustificata la denominazione di *birazionale* data a tale multiplicità d' intersezione della falda ρ_t con la ipersuperficie V_{r-1}.

56. *Determinazione birazionale di* V_{t-1} *di una varietà algebrica* V_t.

In corrispondenza alla determinazione birazionale $V_t(O_h, \rho_t)$ di una varietà algebrica irriducibile, o riducibile primitiva considerata come insieme delle coppie origine-falda t-dimensionale (n. 51) e ad una ipersuperficie V_{r-1}

dell' S_r ambiente della V_t, secante la V_t, in una V_{t-1}, indicato con E_{t-1} lo insieme degli elementi di V_{t-1}, cioè l'insieme dei punti e dei sostegni delle varietà unirazionali contenute nella V_{t-1} associando a detto insieme E_{t-1}, la funzione $B(O_h, \rho_t)$ che si ottiene indicando con $B(O_h, \rho_t)$ la multiplicità d'intersezione birazionale di una falda ρ_t di V_t, nella sua origine O_h, con la V_{r-1}, si ha quella che si dirà *determinazione birazionale* della V_{t-1} della V_t ottenuta intersecando la V_t con la V_{r-1}, e si porrà:

$$V_{t-1} = [E_{t-1}, B(O_h, \rho_t)].$$

Ciò per ricordare che la funzione numerica $B(O_h, \rho_t)$, definita nell'insieme delle coppie origine-falda $V_t(O_h, \rho_t)$, è invariante per trasformazioni birazionali della V_t in una V_t'. Si osservi che essendo ogni varietà unirazionale trasformata da una trasformazione birazionale in una varietà unirazionale, l'insieme E_{t-1} di V_{t-1} sarà trasformato nell'insieme E'_{t-1} degli elementi di V'_{t-1} trasformata di V_{t-1}.

57. *Nota relativa all' origine* O_h *di una falda* ρ_t.

Una falda ρ_t di origine O_h $(h<t)$ ha tutti i rami naturali (n. 49) cioè rispondenti ai rami S_t con l'origine nell'origine delle coordinate, con il punto origine posto in O_h. Si osservi, però che possono esserci altri rami di ρ_t, non compresi fra quelli naturali, aventi il punto origine pure appartenente ad O_h. In tal caso trasformando la falda ρ_t birazionalmente in una falda ρ_t', tali rami non naturali di ρ_t con l'origine O_h, possono venire trasformati in rami di ρ_t' con l'origine non appartenente all'origine $O'_{h'}$ di ρ_t'. Abbiamo già costruito un esempio concreto in cui si verifica tale circostanza. Si è resa manifesta, quindi, la convenienza di definire, oltre alla origine O_h, che si dirà *prima* origine, anche una seconda, terza, ..., origine della falda ρ_t. Si osservi al siguardo che nelle (1) del n. 49, equazioni parametriche di un ramo dell' S_t euclideo, i parametri $z_1, \ldots, z_t$ sono non omogenei. L'origine del ramo è l'origine delle coordinate, per ipotesi, e quindi sono stati posti eguali a zero i termini noti posti a secondo membro delle t serie (1).

Le (4) dello stesso n. 49 dànno le coordinate dell'origine $X'(x'_j)$ del ramo naturale di equazioni (2) della falda ρ_t di equazioni $(\times\times\times)$, rispondente al ramo (1). La varietà V_h unirazionale riempita da tali origini ha l'equazioni (5). Il suo sostegno O_h è l'origine di ρ_t, con $0 \leq h < t$.

Si osservi ora che, in particolare, le coordinate x_j' di X', date dalle (4), possono risultare tutte nulle. Cioè accade:

1.° quando le $c_{11}, \ldots, c_{1t}$ sono tutte nulle,

2.° quando, pur essendo le $c_{11}, \ldots, c_{1t}$ non tutte nulle, risultano tutti nulli i valori assunti dalle forme $g_{js_0}(z_1, \ldots, z_t)$ per $z_1 = c_{11}, \ldots, c_t = c_{1t}$.

Nel primo caso il ramo (1) di S_t, con l'origine in $O(O, \ldots, O)$, non è più un ramo generico perchè nelle (1) le serie a secondo membro si iniziano con un esponente >1. Anche nel secondo caso il ramo (1) non è generico. Perchè in questo caso il punto $C_1(c_{11}, \ldots, c_{1t})$ di S_t, distinto dalla origine delle coordinate, e che congiunto con O dà la retta tangente al ramo in O, risulta un punto singolare per la trasformazione unirazionale fra S_t e la V_h di equazioni (5).

Nel primo caso, se le c_{ij} non nulle per potenze di ρ di esponente minimo si hanno per esponente λ, le serie (2) si inizieranno con potenze di ρ di esponente λs_0. In questo caso particolare l'origine del ramo avrà le coordinate

$$(1^*) \qquad x_j' = f_{j,\lambda s_0}(c_{\lambda 1}, \ldots, c_{\lambda t}).$$

Tale punto descrive la varietà unirazionale di S_r di equazioni parametriche

$$(1^{**}) \qquad x_j = f_{j,\lambda s_0}(z_1, \ldots, z_t).$$

Il sostegno di questa varietà, per $\lambda = 1$ è l'origine O_h della falda ρ_t. Per $\lambda > 1$ si dirà la *λ-ma origine* di ρ_t.

Nel secondo caso le (2) si inizieranno con una potenza di ρ con esponente $> s_0$ e l'origine del ramo avrà come coordinate i coefficienti, non tutti nulli, delle $r+1$ serie (2) delle potenze di grado minimo.

58. *Determinazione birazionale di una* W_{t-1} *di indice di algebricità qualunque di una* V_t.

Fissata in S_r, ambiente della V_t, una $(n+1)$pla di ipersuperficie ordinarie intersecante nella V_t, per subordinazione, la $(n+1)$pla ordinata $V_{t-1}^{(0)}, \ldots, V_{t-1}^{(n)}$, posto, per la relativa determinazione birazionale introdotta nel n. precedente,

$$V_{t-1}^{(j)} = \left[E_{t-1}^{(j)}, B(O_h, \rho_t)\right] \qquad (j = 0, 1, \ldots, n)$$

e posto

$$B(O_h, \rho_t) = N[B_0(O_h, \rho_t), \ldots, B_n(O_h, \rho_t)],$$

si ha la *determinazione birazionale*

$$W_{t-1} = \left[E_{t-1}^{(0)} + E_{t-1}^{(n)}, B(O_h, \rho_t)\right]$$

della W_{t-1}, di indice di algebricità n, intersecata sulla V_t' per subordinazione, della W_{r-1} di S_r determinata dalla $(n+1)$pla ordinata di ipersuperficie ordinarie, secondo quanto è detto nel n. 20.

Ancora sul fegato grasso fisiologico nei Selaci
(Corpi mielinici ed esteri di colesterina nei fegati nani oligolipidici)

Nota del socio ord. **Vincenzo Diamare** *e del dott.* **Antonio de Girolamo**

(Adunanza del dì 5 aprile 1952)

Sunto. — In armonia con quanto è esposto nella memoria presentata nella seduta del 3 marzo 1951 ed inserita negli Atti di questa Accademia, [1]) laddove nel cosìdetto « fegato grasso fisiologico » (olio e fegato) non fu possibile mettere in evidenza corpi milienici ed esteri di colesterina, si dimostra invece, e si documenta fotograficamente, nei fegati nani oligolipidici iperpigmentati essi si pongono in evidenza : ciò che, accanto agli altri rilievi fatti, comprova che quello *status* è una reversibile degenerazione fisiologica, *caso specifico*, da inquadrarsi tuttavia nel grande capitolo delle degenerazioni fisiologiche secondo il concetto generale sostenuto da uno di noi (Diamare, 1921).

Nella precedente memoria si è fatto rilevare come col metodo fisico (Diamare) dell' esame a luce polarizzata dei preparati ottenuti dagli estratti alcoolici o eterei evaporati, in mezzi colloidali, in termostato, non fu possibile ottenere forme mieliniche, e neppure con la sensibilissima prova chimica di Liebermann-Bouchard ottenere reazione positiva per la colesterina.

Nel contempo dai rilievi della letteratura chimico-biologica scaturiva evidente che il chimismo dell' organo in quello *status* grassoso si accompagnava ad altre mutazioni biochimiche, come ad es. difetto di glicogeno (Bottazzi) con presenza dell' idrocarburo (squalene).

Inoltre i nostri esami istologici dimostravano che anche la struttura delle cellule epatiche offriva modifiche rilevanti, come ad es. l' estrema riduzione del protoplasma per l' accumulo di piccole e grosse gocce d' olio e soprattutto — fatto nuovo sfuggito agli altri osservatori — constatavamo una notevole picnosi nucleare. Viceversa si constatava nei fegati nani oligolipidici e iperpigmentati una maggiore integrità protoplasmatica delle trabecole epatiche e soprattutto una perfetta integrità nucleare, donde, dal complesso, *veniva a risultare che in questi fegati, che apparivano piccoli ed anormali rispetto agli altri numerosi casi esaminati nella stessa stagione le trabecole strutturalmente erano più normali.* Le constatazioni biochimiche già esistenti e quelle da noi fatte e le riflessioni addotte, finivano con farci prospettare la condizione grassosa — esaminata anche in confronto alla degenerazione grassa in patologia — come forma di degenerazione fisiologica dissimile negli esiti finali dalla patologica, in quanto reversibile e stagionale.

---

[1]) Diamare V. e de Girolamo A., *Sul fegato grasso fisiologico* Atti Acc. Sc. fis. e mat. ser. 3ª, vol. III, n. 3. Napoli, 1951.

Si allegava inoltre che, nelle esperienze fatte nel 1921 sul fegato di *Torpedo,* in connessione con altre numerose esperienze su svariati organi e tessuti col metodo fisico, Diamare aveva ottenuto splendidi cristalli fluidi documentati dalle relative fotografie: ciò che comprova che doveva trattarsi di fegato non più in condizione di fisiologica degenerazione.

Trattandosi dunque di organo sul quale si indagava (fegato) in cui colesterolo e suoi esteri sono ben noto appannaggio, sorprendevano — rilevammo — gli esiti negativi ottenuti con l' olio e con gli estratti di fegato grasso e, naturalmente, ci riservavamo di ripetere le esperienze con prove ulteriori più categoriche e su materiale più abbondante.

Abbiamo voluto ora portare il nostro esame sui fegati nani oligolipidici a complemento delle indagini già esposte nella memoria ed abbiamo esaminati estratti alcoolici ed eterei filtrati ed evaporati di 2 casi, di cui si fece cenno nella memoria precedente, un maschio ed una femmina.

E riassumiamo che l' indagine fisica (forme mieliniche e cristalli fluidi tipici) risultò positiva in entrambi i casi sia in gomma-sciroppo (colloide), sia in liquido di Müller (cristalloide), e positiva altresì risultò l' indagine chimica (prova di Liebermann-Bouchard e prova di Salkowski), donde la deduzione che *questi fegati cosìdetti anormali finiscono col realizzare una condizione più fisiologica del fegato grasso,* nel quale sopravanza il sopraccarico del grasso con affievolimento, povertà o addirittura non esistenza di altre sostanze caratteristiche del fegato. Condizione di cose che si allontana dalla normale fisiologia, sconfinando nel dominio regressivo, cioè come definimmo e sintetizzammo nella precedente memoria, *una forma reversibile degenerativa* da registrarsi nel novero, con le debite riserve, delle degerazioni fisiologiche, secondo il concetto estesamente esposto nella voluminosa memoria citata di Diamare [1]).

In appoggio e documentazione le fote che si allegano riguardano:

Foto 1. — *Scylliorhinus catulus* maschio. Estratto alcoolico di 30 gr. fegato in 40 cc. di alcool assoluto per 2 mesi. Modo di presentarsi nello striscio del residuo di estratto alcoolico asciutto appena messo in gomma-sciroppo e osservato a Nichols incrociati. Si notavano ammassi puntiformi e grossi accumuli di sostanza birifrangente in forma di rosette.

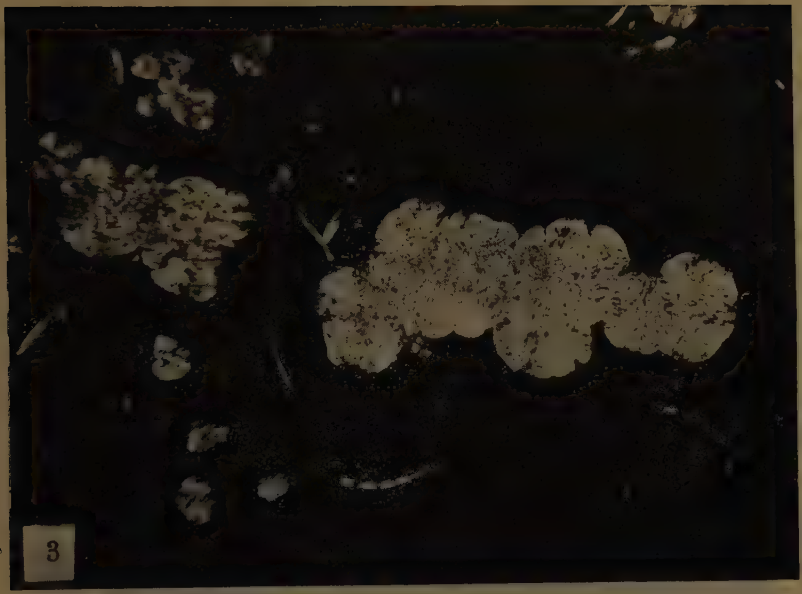
Foto 2. — Lo stesso preparato esaminato dopo 24 h. in termostato in posizione verticale a 40°. Le rosette sono scomparse e si rilevano nitidi sferocristallini con croci di polarizzazione e qualche forma gemmante.

Foto 3. — *Scylliorhinus catulus* femmina, fegato nano, oligolipidico. Striscio appena montato in gomma-sciroppo, dell' estratto alcoolico asciutto

1) Diamare V. *Distrofie e degenerazioni istofisiologiche genitali.* Arch. Ostetr. e Gin., serie II, vol. IX. Napoli 1921.

Microfot. 1 — ***Scylliorhinus catulus*** maschio. Ammassi puntiformi e grossi accumuli di sostanza birifrangente in forma di rosette osservati nello striscio di residuo di estratto alcoolico di fegato nano oligolipidico appena montato in gomma sciroppo e osservato a Nichols incrociati. Ingr. 90 x.

Microfot. 2 — Idem, idem. Lo stesso preparato esaminato dopo permanenza per 24 h. in termosato a 400. Presenza di sferostallini con croci di polarizzazione e qualche forma gemmante con corti vermi liquidi Ingr. 90 x.



Microfot. 3 — *Scylliorhinus catulus* femmina. Fegato nano, oligolipidico. Estratto alcoolico, tenuto in capsula di Petri per 3 mesi, appena montato in gomma-sciroppo. Ammassi di rosette con qualche stria anisotropa circondante il grasso isotropo Ingr. 50 x.

Microfot. 4 — Idem, idem. Altro punto dello stesso preparato, a maggiore ingrandimento. Cristalli radiali allungati e strie birifrangenti puntiformi ai bordi delle masse isotrope. Ingr. 90

in vetro d' orologio, tenuto in scatola di Petri per 3 mesi. Nel campo apparvero solo aggregati di rosette, qualche stria anisotropa circondante il grasso isotropo.

Foto 4. — Altro punto dello stesso preparato visto a più forte ingrandimento, in cui si riconosce la struttura delle rosette, fatte di radiali cristalli allungati; nel campo esistono solo strie birifrangenti, puntiformi, ai bordi delle masse isotrope (grasso ordinario). Le rosette potevano scambiarsi per le usuali cristallizzazioni invernali degli acidi saturi e loro combinazioni (palmitina, stearina). Viceversa, non lo sono (V. foto 5.)

Foto 5. — Lo stesso preparato, tenuto in termostato in posizione verticale ed esaminato dopo 24 h. Sono interamente scomparse le grosse rosette senza traccia di cristalli solidi, ed invece il campo è occupato da forme fluide cristalline orientate nel senso di gravità, e abituali cristalliti.

Microfot. 5 — Idem, idem, Lo stesso preparato dopo permanenza in termostato per 24 h. a 40°. Scomparsa delle grosse rosette e presenza di forme fluide cristalline (corti vermi liquidi e alcuni più grandi gemmanti). Ingr. 90 x.

Le prove di Liebermann-Bouchard e di Salkowski furono eseguite sul materiale dei vetri d' orologio (dal quale si estrassero le minime tracce che svilupparono *in toto* le forme mieliniche fotografate), sciogliendo in cloroformio tutto il residuo asciutto, e furono tutte positive.

Napoli, Stazione Zoologica, 1 Marzo 1952.

Su un' equazione differenziale della meccanica dei fili

Nota del dott. **Francesco Stoppelli,** *presentata dal socio* **Carlo Miranda**

(Adunanza del dì 3 maggio 1952)

Sunto. — Si dimostra l' esistenza di un integrale periodico per una particolare equazione differenziale non lineare del secondo ordine.

In uno studio di dinamica e aerodinamica dei fili [1]), G. Krall è stato condotto a porre il problema dell' esistenza di integrali periodici per la equazione differenziale:

$$y'' + y'\,|y'| + qy' + y - p^2y^3 = r \operatorname{sen} \omega t \tag{1}$$

dove p, q, r ed ω sono delle costanti.

Il problema è stato studiato da J. Cecconi in due lavori successivi, nel primo [2]) dei quali viene dimostrata l' esistenza di almeno un integrale periodico della (1) nell' ipotesi che sia $r = 0$, $q < 0$ e $|p|$ abbastanza piccolo; alla stessa conclusione perviene, nel secondo lavoro [3]), anche nel caso che sia $q \geq 0$, $p \neq 0$ ed r abbastanza piccolo.

Nella presente Nota prendo in considerazione più generalmente l' equazione:

$$y'' + y'\,|y'| + q(t)\,y' + y - p^2(t)\,y^3 = f(t) \tag{2}$$

e dimostro il seguente teorema:

I. Se p (t), q (t), f (t) *sono funzioni continue e periodiche di uno stesso periodo* T *e se* p^2 (t) *é sempre positiva, la* (2) *ammette almeno un integrale periodico di periodo* T. In particolare:

II. Se p *e* q *sono costanti* ($p^2 > 0$) *ed* f (t) *è una funzione continua,*

---

1) G. Krall. *Dinamica e aerodinamica dei fili. III. Problemi non lineari delle vibrazioni visibili.* Rendiconti dell'Acc. Naz. Lincei, s. VIII, vol. V. anno 1948, pagg. 197-203.

2) J. Cecconi. *Su di una equazione differenziale di rilassamento.* Rendiconti dell'Acc. Naz. Lincei, s. VIII, vol. IX, anno 1950, pagg. 38-44.

3) J. Cecconi, *Su di una equazione differenziale non lineare di secondo ordine* Ann. della Scuola Norm. Sup. di Pisa, s. III, vol. IV, anno 1950, pagg. 246-278.

periodica di periodo T, *la (2) ammette almeno un integrale periodico di periodo* T.

Evidentemente per dimostrare il teorema I, basta far vedere che, nelle ipotesi poste, la (2) ammette, nell' intervallo $(0, T)$, un integrale verificante le condizioni ai limiti

$$(3) \qquad y(0) = y(T) \quad , \quad y'(0) = y'(T).$$

Consideriamo allora l' equazione:

$$(4) \qquad y'' - y = g(t)$$

e sia $G(t, \tau)$ la funzione di Green dell' equazione

$$y'' - y = 0$$

relativa alle condizioni ai limiti (3), cioè

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \dfrac{\cosh\left(t - \tau + \dfrac{T}{2}\right)}{2 \operatorname{senh} \dfrac{T}{2}} & \text{per } 0 \leq t \leq \tau \\[2em] \dfrac{\cosh\left(t - \tau - \dfrac{T}{2}\right)}{2 \operatorname{senh} \dfrac{T}{2}} & \text{per } \tau \leq t \leq T. \end{cases}$$

La soluzione della (4) verificante le condizioni ai limiti (3) sarà quindi:

$$y(t) = \int_0^T G(t, \tau)\, g(\tau)\, d\tau.$$

Ciò premesso, indichiamo con Σ lo spazio delle funzioni continue insieme con le loro derivate prime in $(0, T)$, ivi verificanti le (3) e consideriamo la trasformazione funzionale che ad ogni funzione $z(t)$ di Σ fa corrispondere una funzione $y(t)$, anch' essa appartenente a Σ:

$$(5) \quad y(t) = \int_0^T G(t, \tau) \left\{ f(\tau) + p^2(\tau) z^3(\tau) - 2z(\tau) - z'(\tau)\, |z'(\tau)| - q(\tau) z'(\tau) \right\} d\tau.$$

Se indichiamo con α la terna di funzioni $f(t)$, $p(t)$, $q(t)$, possiamo

scrivere la (5):

$$(5') \qquad y = F(z, \alpha).$$

La dimostrazione del nostro teorema è così ricondotta a far vedere che l'equazione funzionale:

$$(6) \qquad y = F(y, \alpha)$$

ammette almeno una soluzione.

Ora lo spazio Σ è lineare normale se per un suo generico elemento y si pone:

$$\| y \| = \max |y| + \max |y'|$$

ed anche α può essere pensato come elemento di uno spazio lineare normale Σ_0, ove si ponga:

$$\| \alpha \| = \max | f | + \max | p | + \max | q |.$$

Per dimostrare il nostro teorema di esistenza, ben si presta il metodo di Leray e Schauder [1]). Secondo tale metodo l'esistenza di almeno una soluzione della (6) rimane assicurata quando si verifichino le seguenti circostanze:

I) Per ogni α la trasformazione (5′) sia completamente continua, cioè sia continua e trasformi insiemi limitati in insiemi compatti.

II) La trasformazione (5′) dipenda con continuità da α nel senso che, comunque si assegnino $\varepsilon > 0$, Z ed A, sia possibile determinare un δ tale che per

$$\| \alpha_1 - \alpha_2 \| < \delta \quad , \quad \| \alpha_1 \| \leq A \quad , \quad \| \alpha_2 \| \leq A \quad , \quad \| z \| \leq Z,$$

riesca:

$$\| F(z, \alpha_1) - F(z, \alpha_2) \| < \varepsilon.$$

III) Esista un elemento α_0 di Σ_0 in corrispondenza al quale la (6)

[1]) J. Larey et Schauder, *Topologie et èquations fonctionnelles,* Ann. Ec. Norm. Sup, s. III, t. 51, anno 1934. Cfr. anche: C. Miranda, *Problemi di esistenza in Analisi Funzionale,* Quaderni Matematici della Scuola Norm. Sup. di Pisa, III, pagg. 152-159.

ammetta soltanto un numero finito dispari di soluzioni $y_1, y_2, \ldots, y_n$ in un intorno di ciascuna delle quali la trasformazione $F(z, \alpha_0)$ sia differenziabile con continuità [1]) e ammetta un differenziale $D(y_i, \delta z)$ completamente continuo e tale che la trasformazione:

$$\delta y = \delta z - D(y_i, \delta z) \tag{7}$$

sia completamente invertibile.

IV) Comunque si assegnino due numeri positivi m ed M $(m < M)$ sia possibile determinare un numero L tale che per ogni soluzione y della (6), corrispondente ad un elemento α verificante le disuguaglianze:

$$\| \alpha \| < M \qquad |p(t)| > m,$$

riesca

$$\| y \| < L.$$

Dimostriamo ora che le predette circostanze sono effettivamente verificate dalla trasformazione (5′). Ciò è ovvio per quanto riguarda la condizione II), mentre la I) segue dal fatto che la (5′) trasforma ogni insieme limitato di Σ in un insieme di funzioni $y(t)$ equilimitate insieme con le loro derivate prime e seconde e perciò equilimitate ed equicontinue insieme con le loro derivate prime.

Per quanto riguarda la condizione III) essa è verificata per α_0 coincidente con l'elemento di Σ_0:

$$f = 0 \quad , \quad p = 1 \quad , \quad q = 1.$$

Infatti in tal caso le soluzioni della (6) sono anche soluzioni periodiche dell' equazione

$$y'' + y' |y'| + y' + y - y^3 = 0 \tag{8}$$

e tale equazione, come ha dimostrato J. Cecconi [2]), ammette come integrali periodici esclusivamente le funzioni:

$$y_1 = 0 \quad , \quad y_2 = 1 \quad , \quad y_3 = -1.$$

---

[1]) Per la definizione di trasformazione differenziale con continuità cfr. C. Miranda, loc. cit. alla nota preced., pag. 60.

[2]) J. Cecconi dimostra infatti, nel suo secondo lavoro, che ogni integrale non costante della (8) o è asintotico a un integrale costante oppure non è definito per tutti i valori di t, per cui in ogni caso non può essere periodico.

D' altra parte per il suddetto valore α_0, il differenziale di $F(z, \alpha_0)$ è:

$$(9) \qquad D(z, \delta z) = \int_0^T G(t, \tau) [(3z^2-2)\delta z - (2|z'|+1)\delta z'] \, d\tau$$

onde segue immediatamente che, fissato Z, si può determinare un K tale che per

$$\| z_1 \| < Z \quad , \quad \| z_2 \| < Z$$

riesca:

$$(10) \qquad \| D(z_1, \delta z) - D(z_2, \delta z) \| \leq K \| z_1 - z_2 \| \cdot \| \delta z \| .$$

Posto inoltre:

$$R(z, \delta z) = F(z+\delta z, \alpha_0) - F(z, \alpha_0) - D(z, \delta z) =$$

$$= \int_0^T G(t, \tau) \{ 3z\delta z^2 + \delta z^3 - (z' + \delta z')|z' + \delta z'| + z'|z'| + 2|z'|\delta z' \} d\tau$$

è evidente che esiste una costante H tale che per $\| z \| < Z$ riesca:

$$(11) \qquad \| R(z, \delta z) \| \leq H \| \delta z \|^2 .$$

Dalle relazioni (10) e (11) segue che $F(z, \alpha_0)$ è differenziabile con continuità per $\| z \| < Z$ e quindi, potendosi prendere $Z > 1$, in un intorno delle soluzioni y_1, y_2, y_3 della (8). Lo stesso ragionamento di cui ci siamo serviti per dimostrare la completa continuità di $F(z, \alpha)$ permette poi di provare che anche $D(z, \delta z)$ è una trasformazione completamente continua di δz. Infine la (7) nel caso nostro diventa:

$$(12) \qquad \delta y = \delta z - \int_0^T G(t, \tau) \{ (3y_i^2 - 2) \delta z - \delta z' \} d\tau .$$

E' questa un' equazione integro-differenziale in δz, la quale, integrando per parti il termine contenente $\delta z'$, si riduce a un' equazione integrale di Fredholm. La completa invertibilità della trasformazione (12) segue pertanto dal teorema dell' alternativa, tenendo presente che l' equazione omogenea associata a (12):

$$\delta z = \int_0^T G(t, \tau) \{ (3y_i^2 - 2) \delta z - \delta z' \} d\tau$$

non ammette soluzioni diverse da quella evidente, giacchè se una tale soluzione esistesse, essa dovrebbe essere un integrale periodico dell'equazione:

$$(13) \qquad \delta z'' - \delta z = (3y_i^2 - 2)\,\delta z - \delta z'$$

ciò che è assurdo perchè la (13) è un'equazione a coefficienti costanti in cui figura effettivamente il termine in $\delta z'$.

Abbiamo così dimostrato che è verificata la condizione III); passiamo ora alla IV). Cominciamo con l'osservare che se y è una soluzione periodica dell'equazione (2), dovrà aversi:

$$y - p^2 y^3 \geq f(t)$$

nei punti di massimo positivo della y ed

$$y - p^2 y^3 \leq f(t)$$

nei punti di minimo negativo. Tenendo presente il significato di m ed M ne segue facilmente che nei punti di massimo di $|y|$ deve essere:

$$m^2\,|y|^3 - |y| \leq M.$$

Detta pertanto Y_0 l'unica radice positiva dell'equazione:

$$m^2\,Y^3 - Y - M = 0$$

si ha:

$$|y| \leq Y_0\,.$$

Dallà (2) segue ancora che nei punti di massimo di $|y'|$ è:

$$y'\,|y'| + qy' + y - p^2 y^3 = f$$

e da questa relazione si vede che anche $|y'|$ è limitato. Resta così provato che la condizione IV) è verificata e con ciò la dimostrazione del teorema I è completata.

Osserviamo ancora che con lo stesso procedimento che ci ha condotto al teorema I si dimostra più generalmente che:

III. *Se* p(t), p_0(t), q(t), q_0(t), f(t) *sono funzioni continue e periodiche dello stesso periodo* T *e se* |p(t)|, |q_0(t)| *sono sempre positivi, l'equazione*:

$$y'' + q_0 y'\,|y'| + qy' + p_0 y - p^2 y^3 = f$$

ammette almeno un integrale periodico di periodo T.

Studio di una trasformazione cremoniana dell' S_8 dedotta da una trasformazione quadratica dell' S_2 triduale

Nota di **Angelo Fadini**, *presentata dal socio* **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 7 giugno 1952)

Sunto. — Dalle equazioni di una trasformazione quadratica dell' S_2 triduale si deducono quelle di una trasformazione cremoniana dell' S_8 complesso, si studia questa trasformazione determinandone gli spazi eccezionali e caratterizzando due sistemi lineari di ipersuperfici.

E' noto [1]) che la prima rappresentazione complessa dell' S_2 triduale si effettua stabilendo una corrispondenza biunivoca tra i punti di tale S_2 ed i piani di un 6-complesso dell' S_8. Orbene in tale prima rappresentazione la trasformazione quadratica di equazioni triduali:

$$(1) \qquad \begin{cases} X' = Y\,T \\ Y' = X\,T \\ T' = X\,Y \end{cases}$$

ha per immagine la trasformazione cremoniana Θ di equazioni:

$$(2\ ) \qquad \begin{cases} x'_1 = x_4\,x_7 \\ x'_4 = x\ \ x_7 \\ x'_7 = x\ \ x_4 \end{cases}$$

$$(2_2) \qquad \begin{cases} x'_2 = x_4\,x_8 + x_5\,x_7 \\ x'_5 = x_1\,x_8 + x_2\,x_7 \\ x'_8 = x_1\,x_5 + x_2\,x_4 \end{cases}$$

$$(2_3) \qquad \begin{cases} x'_3 = x_4\,x_9 + x_6\,x_7 \\ x'_6 = x_1\,x_9 + x_3\,x_7 \\ x'_9 = x_1\,x_6 + x_3\,x_4 \end{cases}$$

nelle quali le x'_i sono le coordinate omogenee del punto corrente P' di un

---

1) A. Fadini. *Proiettività, polarità e coniche dell' S_2 triduale nella prima rappresentazione.* Annali dell' Istituto Superiore di Scienze e Lettere « S. Chiara » Napoli, n. 2, 1951.

certo S_8 complesso e le x_i sono le coordinate del punto corrente in un altro S_8 complesso distinto o sovrapposto al precedente.

Le formule (2) sono risolubili rispetto alle x_i e risolte danno le equazioni della trasformazione inversa della Θ cioè la Θ^{-1}; esse sono:

$$[3_1] \qquad \begin{cases} x_1 = 2\, x'_1\, x'^2_4\, x'_7 \\ x_4 = 2\, x'^2_1\, x'_4\, x'_7 \\ x_7 = 2\, x'^2_1\, x'^2_4\, x'_7 \end{cases}$$

$$[3_2] \qquad \begin{cases} x_2 = (-\, x'_4\, x'_2\, x'_7 + x'_1\, x'_4\, x'_5\, x'_7 + x'_1\, x'^2_4\, x'_8)\, x'_7 \\ x_5 = (x'_1\, x'_4\, x'_2\, x'_7 - x'^2_1\, x'_5\, x'_7 + x'^2_1\, x'_4\, x'_8)\, x'_7 \\ x_8 = x'_1\, x'_2\, x'^2_4\, x'_7 + x'^2_1\, x'_4\, x'_5\, x'_7 - x'^2_1\, x'^2_4\, x'_8 \end{cases}$$

$$[3_3] \qquad \begin{cases} x_3 = (-\, x'_3\, x'^2_4\, x'_7 + x'_1\, x'_4\, x'_6\, x'_7 + x'_1\, x'^2_4\, x'_9)\, x'_7 \\ x_6 = (x'_1\, x'_3\, x'_4\, x'_7 - x'^2_1\, x'_6\, x'_7 + x'^2_1\, x'_4\, x'_9)\, x'_7 \\ x_9 = x'_1\, x'_3\, x'^2_4\, x'_7 + x'^2_1\, x'_4\, x'_6\, x'_7 - x'^2_1\, x'^2_4\, x'_9 \end{cases}$$

La trasformazione Θ subordina nel piano α di equazioni:

$$x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = x_8 = x_9 = 0$$

una corrispondenza quadratica Θ_1 di equazioni $[2_1]$ con le inverve $[3_1]$ le quali ultime isolate dal restante sistema sono dello stesso tipo delle (2_1). La stessa trasformazione Θ subordina nell' S_5 C di equazioni:

$$x_3 = x_6 = x_9 = 0$$

una trasformazione di equazioni (2_2) con le inverse $[3_2]$ e nell' S_5 B di equazioni:

$$x_2 = x_5 = x_8 = 0$$

una trasformazione di equazioni (2_3) con le inverve (3_3).

I piani α_2 ed α_3 rispettivamente di equazioni: $x_1 = x_3 = x_4 = x_6 = x_7 = x_9 = 0$ e $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_7 = x_8 = 0$ sono eccezionali per la trasformazione Θ anzi è per essa eccezionale tutto l' S_5 A congiungente questi due piani.

Al sistema lineare ∞^8 di tutti gli iperpiani dell' S_8 la Θ fa corrispondere il sistema lineare ∞^8 di iperquadriche di equazioni:

$$(4) \qquad \begin{aligned} & a_1\, x_4\, x_7 + a_2\, (x_4\, x_8 + x_5\, x_7) + a_3\, (x_4\, x_9 + x_6\, x_7) + a_4\, x_1\, x_7 + \\ & + a_5\, (x_1\, x_8 + x_2\, x_7) + a_6\, (x_1\, x_9 + x_3\, x_7) + a_7\, x_1\, x_4 + \\ & + a_8\, (x_1\, x_5 + x_2\, x_4) + a_9\, (x_1\, x_6 + x_3\, x_4) = 0 \end{aligned}$$

Le proprietà caratteristiche di questo sistema lineare di iperquadriche sono le seguenti:

1°) La varietà base del sistema (4) contiene, come semplice, l'S_5 A di equazioni:

$$x_1 = x_4 = x_7 = 0$$

l'iperpiano tangente alla generica iperquadrica del sistema in un punto $M\left(0\ ,\bar{x}_2\ ,\ \bar{x}_3\ ,0\ ,\ \bar{x}_5\ ,\bar{x}_6\ ,\ 0\ ,\ \bar{x}_8\ ,\bar{x}_9\right)$ di A ha l'equazione:

$$\begin{gathered}\left(a_5\ \bar{x}_8 + a_6\ \bar{x}_9 + a_8\ \bar{x}_5 + a_9\ \bar{x}_6\right) x_1 + \left(a_2\ \bar{x}_8 + a_3\ \bar{x}_9 + a_8\ \bar{x}_2 + a_9\ \bar{x}_3\right) x_4 + \\ + \left(a_2\ \bar{x}_5 + a_3\ \bar{x}_6 + a_5\ \bar{x}_2 + a_6\ \bar{x}_3\right) x_7 = 0\end{gathered} \qquad [5]$$

tale iperpiano non varia al variare dei coefficienti a_1, a_4, a_7, dunque allo stesso iperpiano sono tangenti ∞^2 iperquadriche del sistema: quelle ottenute facendo variare i tre coefficienti a_1 a_4 a_7 e mantenendo fissi gli altri sei.

2°) Alla varietà base del sistema appartengono anche i tre punti della piramide di riferimento $P_1\,(1\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0)$, $P_4(0\,,0\,,0\,,1\,,0,0,0,0,0)$ e $P_7\,(0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,1\,,0\,,0)$ nei quali gli iperpiani tangenti passano, qualunque sia l'iperquadrica che si considera, rispettivamente per i punti: P_2 e P_3 ; P_5 e P_6 ; P_8 e P_9.

3°) Le intersezioni del sistema con i sei S_3 individuati rispettivamente dai punti della piramide di riferimento: $P_1\,,P_2\,,P_4\,,P_5$; $P_1\,,P_3\,,P_4\,,P_6$;

$$P_4\,,P_5\,,P_7\,,P_8\ ;\ P_4\,,P_6\,,P_7\,,P_9\ ;\ P_1\,,P_2\,,P_7\,,P_8\ ;\ P_1\,,P\,,P_7\,,P_9\ ;$$

invece che sistemi lineari ∞^3 sono sistemi lineari ∞^2 le cui equazioni si ricavano in modo ovvio.

4°) I tre piani $P_1\ P_2\ P_3$; $P_4\ P_5\ P_6$; $P_7\ P_8\ P_9$ appartengono alla varietà base del sistema, e sono semplici per essa.

Il sistema caratterizzato risulta omaloidico e invero, poichè otto iperpiani del sistema lineare ∞^8 di tutti gl' iperpiani dell' S_8 ambiente individuano quale loro intersezioni un punto, analogamente le otto iperquadriche del sistema (4) ad essi corrispondenti s' intersecano fuori della varietà base in un sol punto variabile con esse.

La trasformazione inversa di equazioni (3) è del quint' ordine, sicchè essa fa corrispondere al sistema degli ∞^8 iperpiani dell' S_8 un sistema lineare ∞^8 di ipersuperficie del 5° ordine di equazione:

$$\begin{gathered}2\,a_1\ x'_1\ x'^2_4\ x'^2_7 + 2\,a_2\ x'^2_1\ x'_4\ x'_7 + 2\,a_3\ x'^2_1\ x'_4\ x'_7 - a_4\ x'_2\ x'_4\ x'^2_7 + \\ + a_4\ x'_1\ x'_4\ x'_5 x'^2_7 + a_4\ x'_1\ x'^2_4\ x'_7\ x'_8 + a_5\ x'_1\ x'_2 x'_4 x'^2_7 - a_5\ x'^2_1 x'_5 x'^2_7 + \\ + a_5\ x'^2_1\ x'_4\ x'_7\ x'_8 + a_6\ x'_1\ x'_2\ x'^2_4\ x'_7 + a_6\ x'^2_1\ x'_4\ x'_5\ x'_7 - a_6\ x'_1\ x'_4\ x'_8 + \\ - a_7\ x'_3\ x'^2_4\ x'^2_7 + a_7\ x'_1\ x'_4\ x'_6 x'^2_7 + a_7\ x'_1\ x'^2_4\ x'_7 x'_9 + a_8\ x'_1 x'_3 x'_4 x'^2_7 + \\ - a_8\ x'^2_1\ x'_6 x'^2_7 + a_8 x'^2_1\ x'_4\ x'_7\ x'_9 + a_9\ x'_1\ x'_3\ x'^2_4\ x'_7 + a_9\ x'^2_1\ x'_4\ x'_6\ x'_7 + \\ - a_9\ x'^2_1\ x'^2_4\ x'_9 = 0.\end{gathered} \qquad [6]$$

Le proprietà caratteristiche del sistema [6] sono le seguenti:

1°) tre punti della piramide di riferimento $P_1(1,0,0,0,0,0,0,0,0)$, $P_4(0,0,0,1,0,0,0,0,0)$ e $P_7(0,0,0,0,0,0,1,0,0)$ appartengono alla varietà base del sistema e sono tripli per essa. L'ipercono cubico tangente alla generica ipersuperficie del sistema nel punto P_i contiene il piano $P_i\,P_{i+1}\,P_{i+2}$ $(i=1,4,7)$.

2°) Alla varietà base del sistema appartiene l'S_5 A che è quadruplo per essa e gli iperpiani D, E ed F di equazioni rispettivamente

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$
$$x_4 = x_5 = x_6 = 0$$
$$x_7 = x_8 = x_9 = 0.$$

3°) Alla stessa varietà base appartengano i piani: $P_1\,P_2\,P_3$; $P_4\,P_5\,P_6$; $P_7\,P_8\,P_9$ ciascuno dei quali è triplo per essa.

4°) Le intersezioni del sistema di ipersuperficie con i due S_5 B e C sono due sistemi lineari ∞^5 le cui equazioni si ricavano immediatamente dalla (6).

Il sistema caratterizzato è omaloidico così come lo è quello degli iperpiani cui esso corrisponde per la Θ^{-1}.

Poichè le varietà basi dei sistemi (2) e (3) sono riempite dai punti eccezionali delle rispettive trasformazioni Θ e Θ^{-1} possiamo affermare che sono eccezionali per entrambe le trasformazioni, la diretta e la inversa, i punti dell'S_5 A e quelli dei piani $P_1\,P_2\,P_3$; $P_4\,P_5\,P_6$; $P_7\,P_8\,P_9$.

Si dimostra facilmente che i punti dell'intorno di prim'ordine dei punti eccezionali giacenti in A hanno gli omologhi nello stesso S_5 A.

Infatti se $P\,(0, p_2, p_3, 0, p_5, p_6, 0, p_8, p_9)$ è un punto di A e $Q\,(q_i)$ è un punto generico dell'S_8, alla retta PQ corrisponde per la Θ la curva di equazioni parametriche:

$$\begin{aligned}
\xi'_1 &= \rho\, q_4\, q_7 \\
\xi'_2 &= p_8\, q_4 + p_5\, q_7 + \rho\,(q_4\, q_8 + q_5\, q_7) \\
\xi'_3 &= p_9\, q_4 + p_6\, q_7 + \rho\,(q_4\, q_9 + q_5\, q_7) \\
\xi'_4 &= \rho\, q_1\, q_7 \\
\xi'_5 &= p_8\, q_1 + p_2\, q_9 + \rho\,(q_1\, q_8 + q_2\, q_9) \\
\xi'_6 &= p_9\, q_1 + p_3\, q_7 + \rho\,(q_1\, q_9 + q_3\, q_7) \\
\xi'_7 &= \rho\, q_1\, q_4 \\
\xi'_8 &= p_5\, q_1 + p_2\, q_4 + \rho\,(q_1\, q_5 + q_2\, q_4) \\
\xi'_9 &= p_6\, q_1 + p_3\, q_4 + \rho\,(q_1\, q_6 + q_3\, q_4)
\end{aligned}$$

Da queste equazioni per $\rho = 0$ si traggono le coordinate del punto P_1' dello S_8 omologo del punto P_1 infinitamente vicino al punto P nella di-

rezione della retta PQ, e si deduce che tale punto appartiene all' S_5 A perchè risultano nulle le sue cordinate ξ'_1, ξ'_4 ξ_7.

In modo analogo si dimostra che gli omologhi dei punti dell' intorno di primo ordine dei punti di ciascuno dei tre piani $P_1\,P_2\,P_3$; $P_4\,P_5\,P_6$; $P_7\,P_8\,P_9$ stanno rispettivamente nei tre S_5 opposti a questi piani.

A risultati analoghi si giunge considerando gli omologhi dei punti dell' intorno di prim' ordine dei punti eccezionali nella corrispondenza inversa.

La trasformazione cremoniana studiata è stata dedotta da una trasformazione cremoniana quadratica nell' S_2 triduale considerando la prima rappresentazione complessa di tale S_2. Altre corrispondenze si ottengono considerando la seconda o la terza rappresentazione complessa o, in generale, come ha dimostrato il prof. SPAMPINATO [1]) considerando una qualsiasi delle rappresentazioni complesse di un S_n ipercomplesso e in essa l' immagine di una trasformazione cremoniana istituita nell' S_n ipercomplesso considerato.

Si osservi infine che se moltiplichiamo i secondi membri delle (1) per un elemento $C = C_1\,U_1 + C_2\,U_2 + C_3\,U_3$ non nullo nè divisore dello zero e variabile nell' algebra, la trasformazione quadratica (1) dell' S_2 triduale non muta mentre la trasformazione Θ dell' S_8 descrive un sistema lineare di trasformazioni di dimensione complessa 2.

---

[1]) N. SPAMPINATO. *Rappresentazioni complesse delle trasformazioni birazionali di un S_r ipercomplesso.* La Ricerca rivista di matematica pura ed applicata. Anno III n. 1. Napoli 1952.

Studio di una trasformazione cremoniana dell' S_8 dedotta da una trasformazione quadratica dell' S_2 tripotenziale

Nota di **Rita Bruno**, *presentata dal socio* **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 7 giugno 1952)

Sunto. — Deduzione di una trasformazione cremoniana (2 . 8) dell' S_8 da una trasformazione quadratica dell' S_2 tripotenziale. Studio di tale trasformazione e conseguente caratterizzazione di due sistemi lineari di ipersuperfici.

Sia stabilita nell' S_2 proiettivo tripotenziale la trasformazione quadratica generale con i tre punti base $U_1 \equiv (u, 0, 0)$; $U_2 \equiv (0, u, 0)$; $U_3 \equiv (0, 0, u)$ di equazioni;

$$[1] \qquad \begin{cases} X' = Y\,Z \\ Y' = X\,Z \\ Z' = X\,Y \end{cases}$$

che porta il punto $P \equiv (XYZ)$ nel punto $P' \equiv (X'Y'Z')$ di tale S_2 tripotenziale.

Nell' S_8 ambiente della congruenza di piani [Prima rappresentazione dell' S_2 tripotenziale] resta determinata una trasformazione cremoniana (2,8) le cui formule dirette sono:

$$[2_1] \begin{cases} x'_1 = y_1 z_1 \\ y'_1 = x_1 z_1 \\ z'_1 = x_1 y_1 \end{cases} \qquad [2_2] \begin{cases} x'_2 = y_1 z_2 + y_2 z_1 \\ y'_2 = x_1 z_2 + x_2 z_1 \\ z'_2 = x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{cases} \qquad [2_3] \begin{cases} x'_3 = y_1 z_3 + y_2 z_2 + y_3 z_1 \\ y'_3 = x_1 z_3 + x_2 z_2 + x_3 z_1 \\ z'_3 = x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1 \end{cases}$$

e le inverse sono:

$$[3_1] \qquad \begin{cases} x_1 = 8\,x'^2_1\,y'^3_1\,z'^3_1 \\ y_1 = 8\,x'^3_1\,y'^2_1\,z'^3_1 \\ z_1 = 8\,x'^3_1\,y'^3_1\,z'^2_1 \end{cases}$$

$$[3_2] \begin{cases} x_2 = 4\,x'^2_1\,y'^2_1\,z'^3_1\,y'_2 + 4\,x'^2_1\,y'^3_1\,z'^2_1\,z'_2 - 4\,x'_1\,y'^3_1\,z'^3_1\,x'_2 \\ y_2 = 4\,x'^2_1\,y'^2_1\,z'^3_1\,x'_2 + 4\,x'^3_1\,y'^2_1\,z'^2_1\,z'_2 - 4\,x'^3_1\,y'_1\,z'^3_1\,y'_2 \\ z_2 = 4\,x'^2_1\,y'^3_1\,z'^2_1\,x'_2 + 4\,x'^3_1\,y'^2_1\,z'^2_1\,y'_2 - 4\,x'^3_1\,y'^3_1\,z'_1\,z'_2 \end{cases}$$

$$
[3_3]\quad \left\{
\begin{aligned}
x_3 = {} & 4\, x'^2_1\, y'^2_1\, z'^3_1\, y'_3 + 4\, x'^2_1\, y'^3_1\, z'^2_1\, z'_3 - 4\, x'_1\, y'^3_1\, z'^3_1\, x'_3 + \\
& + 3\, y'^3_1\, z'^3_1\, x'^2_1 - x'^2_1\, y'^3_1\, z'_1\, z'^2_2 - x'^2_1\, y'_1\, z'^3_1\, y'^2_2 + \\
& + 2\, x'^2_1\, y'^2_1\, z'^2_1\, y'_2\, z'_2 - 2\, x'_1\, y'^3_1\, z'^2_1\, x'_2\, z'_2 - 2\, x'_1\, y'^2_1\, z'^3_1\, x'_2\, y'_2 \\[1ex]
y_3 = {} & 4\, x'^2_1\, y'^2_1\, z'^3_1\, x'_3 + 4\, x'^3_1\, y'^2_1\, z'^2_1\, z'_3 - 4\, x'^3_1\, y'_1\, z'^3_1\, y'_3 + \\
& + 3\, x'^3_1\, z'^3_1\, y'^2_2 - x'^3_1\, y'^2_1\, z'_1\, z'^2_2 - x'_1\, y'^2_1\, z'^3_1\, x'^2_2 + \\
& + 2\, x'^2_1\, y'^2_1\, z'^2_1\, x'_2\, z'_2 - 2\, x'^3_1\, y'_1\, z'^2_1\, x'_2\, z'_2 - 2\, x'^2_1\, y'_1\, z'^3_1\, x'_2\, y'_2 \\[1ex]
z_3 = {} & 4\, x'^2_1\, y'^3_1\, z'^2_1\, x'_3 + 4\, x'^3_1\, y'^2_1\, z'^2_1\, y'_3 - 4\, x'^3_1\, y'^3_1\, z'_1\, z'_3 + \\
& + 3\, x'^3_1\, y'^3_1\, z'^2_2 - x'^3_1\, y'_1\, z'^2_1\, y'^2_2 - x'_1\, y'^3_1\, z'^2_1\, x'^2_2 + \\
& + 2\, x'^2_1\, y'^2_1\, z'^2_1\, x'_2\, y'_2 - 2\, x'^3_1\, y'^2_1\, z'_1\, y'_2\, z'_2 - 2\, x'^2_1\, y'^3_1\, z'_1\, x'_2\, z'_2
\end{aligned}
\right.
$$

avendo indicato con $(x_i\ y_i\ z_i)$ $[i=1, 2, 3]$ le coordinate omogenee di un punto corrente nell' S_8 e con $(x_i'\ y_i'\ z_i')$ $[i=1, 2, 3]$ quelle del punto corrente in un altro S_8 distinto o coincidente col precedente.

La trasformazione diretta (Ω) subordina nel piano α di equazione:

$$x_2 = x_3 = y_2 = y_3 = z_2 = z_3 = 0$$

una corrisponenza quadratica $(\Omega)_1$ di equazioni $[2_1]$ con l' inverse $[3_1]$ e quest' ultime isolate dalle rimanenti equazioni del sistema relativo alla trasformazione inversa $(\Omega)^{-1}$, sono dello stesso tipo delle $[2_1]$. Cioè nella (Ω) il piano α si trasforma in se stesso e due punti omologhi nella trasformazione $(\Omega)_1$ sono i punti d' appoggio, sul piano α, di due piani della congruenza di piani omologhi nella trasformazione (Ω).

La trasformazione diretta (Ω) fa corrispondere al sistema lineare ∞^8 di tutti gli iperpiani dell' S_8 il sistema omoloidico ∞^8 di iperquadriche:

$$
[4]\quad \left\{
\begin{aligned}
& \lambda_1\, y_1\, z_1 + \lambda_2\, (y_1\, z_2 + z_1\, y_2) + \lambda_3\, (y_1\, z_3 + y_2\, z_2 + y_3\, z_1) + \lambda_4\, x_1\, z_1 + \\
& + \lambda_5\, (x_1\, z_2 + x_2\, z_1) + \lambda_6\, (x_1\, z_3 + x_2\, z_2 + x_3\, z_1) + \lambda_7\, x_1\, y_1 + \\
& + \lambda_8\, (x_1\, y_2 + x_2\, y_1) + \lambda_9\, (x_1\, y_3 + x_2\, y_2 + x_3\, y_1) = 0
\end{aligned}
\right.
$$

I punti fondamentali della (Ω) [basi del sistema omoloidico [4]] sono:

1°) I punti dei tre S_3 : $\overline{S}_3\, (A_2\, A_3\, A_6\, A_9)$; $\overline{\overline{S}}_3\, (A_5\, A_3\, A_6\, A_9)$ $\overline{\overline{\overline{S}}}_3\, (A_8\, A_3\, A_6\, A_9)$ come semplici.

Essi hanno in comune l' $S_2 \equiv (A_3\, A_6\, A_9$ e ciascuni di essi è l' ambiente di una stella di rette di centro rispettivamente A_3, A_6, A_9, quindi essi non sono altro che i tre S_3 basi della congruenza di piani.

2^0) I punti dei tre piani $A_1\,A_2\,A_3$; $A_4\,A_5\,A_6$; $A_7\,A_8\,A_9$ anch'essi semplici. Tali piani non sono altro che i tre piani rappresentanti nell' S_8 i tre punti U_1, U_2, U_3 fondamentali per la trasformazione quadratica [1] nell' S_2 proiettivo tripotenziale.

Mentre quindi i tre S_3 precedenti sono fondamentali sia per la (Ω) che per la congruenza di piani, i tre S_2 suddetti lo sono solo per la trasformazione (Ω).

L' iperpiano tangente alla generica iperquadrica del sistema [4] in un punto $\overline{P}$ $(O, \overline{x_2}, \overline{x_3}, O, O, \overline{y_3}, O, O, \overline{z_3})$ di $\overline{S_3}$ ha l' equazione:

$$\begin{aligned} &(\lambda_6\,\overline{z_3} + \lambda_9\,\overline{y_3})\,x_1 + (\lambda_3\,\overline{z_3} + \lambda_8\,\overline{x_2} + \lambda_9\,\overline{x_3})\,y_1 + \lambda_9\,\overline{x_2}\,y_2 + \\ &+ (\lambda_3\,\overline{y_3} + \lambda_5\,\overline{x_2} + \lambda_6\,\overline{x_3})\,z_1 + \lambda_6\,\overline{x_2}\,z_2 = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Tale iperpiano non varia al variare dei coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4\,\lambda_7$, dunque allo stesso iperpiano sono tangenti ∞^3 iperquadriche e precisamente quelle ottenute facendo variare i quattro coefficienti anzidetti e mantenendo fissi gli altri cinque.

Analoghe osservazioni si fanno per gli altri due S_3 : $\overline{\overline{S_3}}$ e $\overline{\overline{\overline{S_3}}}$.

L' iperpiano tangente alla generica iperquadrica del sistema [4] in un punto $Q \equiv (O, O, \overline{q_3}, O, O, \overline{p_3}\; O, O, \overline{K_3})$ dell' $S_2 : A_3\,A_6\,A_9$ intersezione dei 3 S_3 ha l' equazione:

$$(\lambda_6\,\overline{K_3} + \lambda_3\,\overline{p_3})\,x_1 + (\lambda_3\,\overline{K_3} + \lambda_9\,\overline{q_3})\,y_1 + (\lambda_3\,\overline{p_3} + \lambda_6\,\overline{q_3})\,z_1 = 0 \tag{6}$$

Tale iperpiano, tangente ad ∞^5 iperquadriche del sistema [4] appartiene ad un sistema ∞^2 di iperpiani con i punti base A_2, A_3, A_5, A_6, A_9. Contiene perciò oltre l' $S_2 : A_3\,A_6\,A_9$ addirittura l' S_5 A di equazioni

$$x_1 = y_1 = z_1 = 0$$

e quindi i tre S_3 basi congiunti da tale S_5 A.

La trasformazione inversa $(\Omega)^{-1}$ fa corrispondere al sistema lineare degli ∞^8 iperpiani dell' S_8 un sistema omaloidico ∞^8 di ipersuperfici dell' ottavo ordine di equazione:

$$\begin{aligned} &8\lambda_1 x_1'^2 y_1'^3 z_1'^3 + 4\lambda_2(x_1'^2 y_1'^2 z_1'^3 y_2' + x_1'^2 y_1'^3 z_1'^2 z_2' - x_1' y_1'^3 z_1'^3 x_2') + \\ &+ \lambda_3(4x_1'^2 y_1'^2 z_1'^3 y_3' + 4x_1'^2 y_1'^3 z_1'^2 z_3' - 4x_1' y_1'^3 x_3' z_1'^3 + 3y_1'^3 z_1'^3 x_2'^2 - \\ &- x_1'^2 y_1'^3 z_1' z_2'^2 - x_1'^2 y_1' z_1'^3 y_2'^2 + 2x_1'^2 y_1'^2 z_1'^2 y_2' z_2' - 2x_1' y_1'^3 z_1'^2 x_2' z_2' - \\ &- 2x_1' y_1'^2 z_1'^3 x_2' y_2') + 8\lambda_4 x_1'^3 y_1'^2 z_1'^3 + 4\lambda_5(x_1'^2 y_1'^2 z_1'^3 x_2' + \end{aligned} \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
&+x'^3_1y'^2_1z'^2_1z'_2-x'^3_1y'_1z'^3_1y'_2)+\lambda_6(4x'^2_1y'^2_1z'^3_1x'_3+4x'^3_3y'^2_1z'^2_1z'_3-\\
&-4x'^3_1y'_1z'^3_1y'_3+3x'^3_1z'^3_1y'^2_2-x'^3_1y'^2_1z'_1z'^2_2-x'_1y'^2_1z'_1x'^2_2+\\
&+2x'^2_1y'^2_1z'^2_1x'_2z'_2-2y'_1z'^2_1y'_2z'_2-2x'^2_1y'_1z'^3_1x'_2y'_2)+\\
&+8\lambda_7x'^3_1y'^3_1z'^2_1+4\lambda_8(x'^2_1y'^3_1z'^2_1x'_2+x'^3_1y'^2_1z'^2_1y'^2_1-x'^3_1y'^3_1z'_1(z'_2)+\\
&+\lambda_9(4x'^2_1y'^3_1z'^2_1x'_3+4x'^3_1y'^2_1z'^2_1y'_3-4x'^3_1y'^3_1z'_1z'_3+3x'^3_1y'^3_1z'^2_2+\\
&-x'^3_1y'_1z'^2_1y'^2_2-x'_1y'^3_1z'^2_1x'^2_2+2x'^2_1y'^2_1z'^2_1x'_2y'_2-2x'^3_1y'^2_1z'_1y'_2z'_2-\\
&-2x'^2_1y'^3_1z'_1x'_2z'_2)=0
\end{aligned}
$$

I punti fondamentali della $(\Omega)^{-1}$ [basi del sistema omoloidico [7]] sono

1°) I punti dei tre S_6 : S_6^* $[x'_1=x'_2=0]$; S_6^{**} $[y'_1=y'_2=0]$ S_6^{***} $[z'_1=z'_2=0]$ come semplici. Tali S_6 s' intersecano nel piano $A_3\,A_6\,A_9$ ossia nel piano a cui si appoggiano i tre S_2 fondamentali della trasformazione (Ω). Tali S_6 sono ottenuti congiungendo rispettivamente due dei tre S_2 basi del sistema [4] con il punto d' appoggio del terzo piano su $A_3\,A_9\,A_6$.

2°) I punti dei tre S_6 : S'_6 $[x'_1=y'_1=0]$; S''_6 $[y'_1=z'_1=0]$; S'''_6 $[x'_1=z'_1=0]$ come tripli. Tali S_6 s' intersecano nell' S_5 A ambiente dei S_3 fondamentali per la trasformazione $[\Omega]$, essi sono ottenuti congiungendo l' S_5 A rispettivamente con i punti $A_7\,A_1\,A_4$.

Per gli omologhi dei punti dell' intorno di primo ordine dei punti fondamentali trovati nella trasformazione (Ω) e $(\Omega)^{-1}$ si ha infine:

1° All' $\overline{S}_3$ $(A_2\,A_3\,A_6\,A_9)$ corrisponde un sistema ∞^2 di $[S_3]$ che ha per vertice la retta $A_6\,A_9$ e per spazio ambiente l' S_4 $(x_3=x_2=y_1=z_1=0)$

A ciascuna retta dell' $\overline{S}_3$ del fascio di centro A_2 corrisponde un S_3 del sistema ∞^2 $[S_3]$.

Per ogni fissato punto $\overline{P}$ nell' $\overline{S}_3$ resta determinato l' $\overline{S}_3^*$ del sistema ∞^2 $[S_3]$ quale insieme degli omologhi dell' intorno del 1° ordine di $\overline{P}$. $\overline{P}$ determina inoltre un $S_6^{\overline{P}}$ (dipendente da $\overline{P}$) passante per l' $\overline{S}_3$ base e vertice di un fascio $[\chi]$ di iperpiani dell' $\overline{S}_8$. Suddividendo l' intorno di $\overline{P}$ (del 1° ordine) in ∞^1 intorni ciascuno appartenente ad un iperpiano di $[\chi]$ a ciascun intorno di tale sistema ∞^1 di intorni corrisponde un piano π intersezione dell' $\overline{S}_3^*$ fisso e di un S_3 variabile in un fascio $[\Phi_\beta]$ il cui vertice è il piano $\beta\equiv A_3\,A_5\,A_8$. Al variare dell' S_7 in $[\chi]$ varia π in un fascio)φ_g) [essendo g la intersezione di $\overline{S}_3^*$ con β], riempendo l' $\overline{S}_3^*$

Analoghe osservazioni possono farsi per gli intorni del 1° ordine degli altri due S_3 : $\overline{\overline{S}}_3$ e $\overline{\overline{\overline{S}}}_3$

2°) Ciascun piano $A_1 A_2 A_3$, $A_4 A_5 A_6$, $A_7 A_8 A_9$ ha per omologo l' S_5 opposto riempito da un sistema ∞^5 S_4.

1°') Ai tre S_6 tripli per la $(\Omega)^1$: S_6' ; S_6'' ; S_6''' corrispondono le rette $A_3 A_6$; $A_6 A_9$; $A_3 A_9$ rispettivamente.

Fissato un punto P' nell' S_6 resta determinata la retta $A_3 A_6$ quale insieme degli omologhi dell' intorno del 1° ordine di P'. P' inoltre determina nell' S_8 una V_6^3 (contenente S_6') vertice di un fascio $[\Phi \, v_7^3]$ di V_7^3 dell' S_8. Suddividendo l' intorno del 1° ordine di P' in ∞^1 intorni ciascuno appartenente ad una V_7^3 a ciascun intorno di tale sistema ∞^1 di intorni corrisponde un determinato punto della $A_3 A_6$. Al variare della V_7^3 in $[\Phi \, v_7^3]$ varierà il punto sulla $A_3 A_6$. Analoghe osservazioni possono farsi per gli intorni del 1° ordine dei punti degli altri due S_6 : S_6'' e S_6'''.

2°) Infine i tre S_6 : S_6^* ; S_6^{**} ; S_6^{***} semplici per la $(\Omega)^1$ hanno per omologhi rispettivamente i punti A_3 ; A_6 ; A_9.

Revisione degli ittioliti miocenici di Bra studiati da Oronzio Gabriele Costa

Nota del socio ordinario **Geremia D' Erasmo**

(Adunanza del dì 7 giugno 1952)

Sunto. — Vengono esaminati ex-novo gli ittioliti, provenienti dalle argille marnose giallo chiare e dalle marne grigio-azzurrognole mioceniche dei dintorni di Bra in Piemonte, che erano stati oggetto di studio da parte di Oronzio Gabriele Costa in due note del 1865 e del 1867; ne sono meglio precisati i caratteri, corrette le determinazioni e stabiliti i rapporti di coesistenza e di affinità con i rappresentanti delle altre ittiofaune coeve.

I.

INTRODUZIONE

Per effetto delle gravi distruzioni, che la guerra ha causate alle collezioni ittiologiche del Museo Paleontologico di Napoli, andarono pressochè totalmente perdute, in sèguito ad incendio provocato da bombardamento aereo nel 1941, le ricche raccolte di pesci cretacei, terziari e quaternari provenienti dai più svariati e noti giacimenti italiani e stranieri: a cominciare da quelle dei classici depositi sopracretacei del Monte Libano (Hakel e Sahel Alma), eocenici del M. Bolca e di Gassino, ed oligocenici di Chiavon, fino alle ittiofaune langhiane di Rosignano, Vignale, Lecce, Siracusa, Ragusa e Scicli, a quelle del Miocene superiore del Gabbro, di Senigallia, di Mondaino, di Racalmuto, di Castro dei Volsci, e alle altre, più recenti ma non meno interessanti, delle argille marnose plio-pleistoceniche di Nardò e di Taranto. Parecchie di tali raccolte avevano fornito, com' è noto, larga messe di osservazioni a studiosi molteplici: O. G. Costa, F. Bassani, M. Pasquale, G. Vigliarolo, G. De Alessandri, G. De Stefano, G. D' Erasmo ecc.

Per un caso veramente fortuito non subirono invece alcun danno i pochi ittioliti del Terziario piemontese di Bra, già studiati, quasi novanta anni or sono, da Oronzio Gabriele Costa, i quali, dovendo servire da materiale di confronto per un altro lavoro dello scrivente in corso di preparazione da vari anni, erano stati provvisoriamente tolti dal Museo e trasportati in altro locale dell' Istituto. Avendo di questi ultimi compiuto una minuziosa revisione, espongo nella presente nota i risultati del mio studio, che mi sembrano non privi d' interesse, non solo al fine di far conoscere

l' effettiva consistenza degli avanzi finora incompletamente o inesattamente determinati, ma anche per richiamare l' attenzione dei palittiologi sopra una questione di nomenclatura riguardante il gen. *Aelia* Costa.

Dei pesci fossili di Bra Oronzio Gabriele Costa ebbe occasione di occuparsi negli ultimi anni di sua vita, allorchè, soggiornando a Torino per l' adempimento del suo mandato parlamentare, ebbe notizia del rinvenimento di alcuni esemplari, posseduti dai fratelli Craveri di Bra, noti in quel tempo come cultori di scienze naturali e benemeriti collezionisti tanto di animali e piante, quanto di minerali, rocce e fossili.

Appassionato ricercatore e studioso delle ricchezze paleontologiche del nostro paese, alla illustrazione delle quali contribuì con non meno di un centinaio di lavori diversi, il Costa si recò personalmente a Bra, nel novembre del 1864, per visitare le raccolte dei signori Craveri, che dovevano costituire più tardi il nucleo principale di quel Museo Civico di Storia Naturale, e riuscì ad ottenere dalla cortesia dei raccoglitori tre fra i pochi esemplari rinvenuti nei terreni terziari dei colli Braidesi, che gli parvero i meno incompleti e gli fornirono il materiale da studio per una prima nota *(Bra ed i signori Craveri)*, inserita nel Bullettino dell' Associazione nazionale italiana di mutuo soccorso degli scienziati, letterati ed artisti di Napoli (dispensa II, pubbl. il 22 marzo del 1865). In quel lavoro, oltre ad una sommaria descrizione dei tre frammenti ittiolitici, determinati rispettivamente come *Alosa vulgaris* Linn. sp., *Blennius Craverii* n. sp., *Muraena* sp., e figurati in una tavola annessa, vengono dati brevi cenni di altri fossili della stessa provenienza, esaminati solo di sfuggita *(Testudo, Sepia, Pilumnus, Pecten cristatus, Ostrea, Spatangus,* filliti), e sono elencati i campioni più notevoli delle altre collezioni scientifiche conservate nel medesimo Museo.

Due anni dopo, e cioè nel maggio 1867, il Costa pubblicava nello stesso periodico (dispensa I della nuova serie) una *Seconda memoria sui pesci fossili di Bra,* destinata a dar notizia degli ulteriori rinvenimenti ittiolitici fatti dai fratelli Craveri in « un terreno marnoso propinquo a quella città ». Degli otto esemplari avuti in istudio, uno venne illustrato come una nuova specie del gen. *Gobius* (*G. Craverii* Costa), un secondo fu considerato di genere indeterminabile, e gli altri sei vennero attribuiti tutti ad una novella specie di *Aelia (A. pedemontana* Costa) Dei rappresentanti delle tre forme riconosciute sono date, in annessa tavola, tre figure in grandezza naturale.

Riassumendo, i pesci fossili di Bra descritti da O. G. Costa sono i seguenti:

a) nella nota I (1865):

1. *Alosa vulgaris* Linn. sp. (tav. I, fig. 1);
2. *Blennius Craverii* Costa (tav. I, fig. 2);

3. *Muraena?* sp. (tav. I, fig. 3).

b) nella nota II (1867):

4. *Gobius Craverii* Costa (tav. II, fig. 1);
5. *Aelia pedemontana* Costa (tav. II, fig. 2);
6. Gen. ind. (tav. II, fig. 3).

Ad eccezione dell' esemplare alla fig. 1 della tav. II *(Gobius Craverii)*, che non ho rinvenuto in collezione, gli altri qui sopra elencati sono attualmente conservati nel Museo geo-paleontologico di Napoli e vengono presi in separato esame nelle pagine che seguono. Mi sono recentemente rivolto al direttore del Museo Civico di Storia naturale di Bra per ottenere informazioni sulla eventuale esistenza di altri esemplari della stessa provenienza in quelle collezioni — con la fiducia di poter estendere le mie ricerche a tutti gli ittioliti rinvenuti nel territorio — ma la mia richiesta non ha avuto, purtroppo, alcun risultato positivo.

Prima di passare alla descrizione degli esemplari a mia disposizione, occorre però precisarne la località di provenienza e l' orizzonte stratigrafico.

Il Costa non dà, a questo riguardo, che scarsi e vaghi cenni, limitandosi ad affermare che gl' ittioliti descritti nella prima nota sono stati ottenuti « per un recente scavo dai colli della Morra, posti al di là del Tanaro » e che « il terreno che li racchiude è lacustre, come lo dimostrano il sedimento di calcarea solforosa e la natura dei notanti di acqua dolce. Esso si riferisce al Pliocene inferiore o Miocene superiore; ed a questo medesimo terreno appartiene ancor la testuggine, ma incontrata sul taglio della ferrovia a qualche distanza da Brà ». Quanto agli esemplari illustrati nella seconda nota, manca qualsiasi preciso riferimento al terreno di provenienza, che una frase generica, relativa al proseguimento degli scavi, fa ritenere che sia lo stesso « terreno marnoso propinquo a quella città » che aveva fornito i precedenti ittioliti, anche se il Costa riconosca giustamente che i nuovi rinvenimenti misero in luce pesci fossili « diversi di specie e di genere dai precedenti ».

Topograficamente più precise, per quanto poco esatte dal punto di vista stratigrafico e litologico, sono le notizie fornite da Federico Craveri nei suoi *Cenni esplicativi* che precedono il *Catalogo delle filliti braidesi*. Il lavoro del Craveri, che porta la data del luglio 1870, non venne stampato; ma i brani principali del manoscritto (che si conserva nel Museo Civico di Bra) riguardanti le località di rinvenimento e la storia degli scavi furono riportati dal Peola in diverse memorie [1]), e l' elenco delle

[1]) Peola P. *Le conifere terziarie del Piemonte. Contributo alla paleofitologia piemontese.* Boll. Soc. geol. it., vol. XII, pag. 707. Roma, 1893. — Id. *Flora fossile braidese*, pp. 9-15. Bra, Tip. Racca, 1895.

specie vegetali fu fatto conoscere dal SACCO [1]) e dallo stesso PEOLA, al quale si deve un' accurata revisione di quella flora fossile. Dai brani editi del manoscritto CRAVERI risulta, che i pesci fossili studiati dal COSTA furono rinvenuti non solo in due tempi diversi, ma anche in due località distinte: e precisamente quelli illustrati nella prima nota furono scavati « ai piedi del colle sulla cui vetta torreggia Santa Vittoria », allorchè nel 1864 s'intraprésero i lavori della ferrovia che da Bra conduce ad Alba e « si entrò nella regione selenitosa » [2]); quelli pubblicati nella seconda nota vennero scoperti, nella primavera del 1865, « nelle vicinanze del Castello della Volta, entro un tufo biancastro, insieme con impronte fillitiche impastate con molti piccoli crostacei marini, nonchè molti individui larvali di *Libellula Doris* ».

La stratigrafia del territorio fu, invece, ben precisata e chiarita dal compianto prof. Federico SACCO, che ne trattò diffusamente in lavori molteplici [3]).

In uno di essi, che riguarda più particolarmente *I Colli Braidesi,* SACCO attribuisce al Messiniano, cioè alla *facies* lacustro-lagunare del Miocene superiore, le marne argillose di vario colore, talora grigio-verdastre o nerastre, ma più comunemente grigio-azzurrognole, che comprendono potenti lenti e spesso banchi gessiferi. A questi straterelli marnoso-sabbiosi fogliettati spettano, secondo il SACCO, i pesci, i resti di insetti e le abbondanti

---

[1]) SACCO F. *La valle della Stura di Cuneo* ecc., pp. 40-44. Atti Soc. it. di Sc. nat., vol. XXVIII. Milano, 1886. — ID. *Il piano messiniano nel Piemonte.* Boll. Soc. geol. it., vol. V, pp 85-86. Roma, 1886.

[2]) « Nello stesso sito », dice il CRAVERI, « si rinvenne l'interessante esemplare della testuggine d'acqua dolce » esaminata dal SISMONDA e poi pubblicata dal PORTIS (*Testudo Craverii* Portis). Secondo quest'ultimo autore, il fossile « consiste in un modello di argilla azzurra gessosa che riempì tutto il guscio dell'animale, vi si modellò esattamente e sopravvisse al guscio stesso, del quale non restano che poche parti » (PORTIS A. *Di alcuni fossili terziari del Piemonte e della Liguria appartenenti all' ordine dei Cheloni.* Mem. R. Acc. Sc. Torino, s. 2ª, vol. XXXII, 1880, pag. 121, tav. III, fig. A e B)

[3]) Fra i numerosi lavori, nei quali il SACCO esaminò la successione stratigrafica e le ricchezze paleontologiche dei terreni terziari di questa regione, ricordo, come più importanti, i seguenti: *La valle della Stura di Cuneo* ecc. Loc. cit., 1886. — *Il piano messiniano nel Piemonte.* Parte I: *Mondovì-Guarene;* parte II *Guarene-Tortona.* Boll. Soc. geol. it., vol. V, pp. 74-92 e 363-393. Roma. 1886. — *Studio geologico dei dintorni di Guarene d' Alba.* Atti R. Acc. Sc., vol. XXIII. Torino, 1887. — *Studio geologico delle colline di Cherasco e della Morra in Piemonte.* Boll. R. Com. Geol. d' It., vol. XIX. Roma, 1888. — *I colli Braidesi.* Annali R. Accad. d' Agric., vol. XXXI. Torino, 1889. — *Il bacino terziario e quaternario del Piemonte.* Milano, 1889-90. — *Note illustrative dei fogli della carta geol. d' It. costituenti il bacino terz. del Piemonte.* Roma, 1935.

filliti ecc. scavati sotto il Borgo di S. Vittoria (prima nota del COSTA); mentre nei banchi gessiferi ad essi intercalati furono rinvenuti altri fossili, specialmente fillitici, nonchè la *Testudo Craverii* illustrata dal PORTIS.

In altro lavoro, che più specialmente si riferisce alle colline di Cherasco e della Morra, lo stesso autore, occupandosi della cresta collinosa che collega il Castello della Volta al paese di Novello, attribuisce al Tortoniano tanto i banchi arenacei grigio-bluastri con foraminiferi, ostriche, pettinidi, balanidi ecc. (formazione di litorale e di bassofondo marino del Tortoniano medio-inferiore), quanto i sovrastanti strati marnosi grigio-giallastri, alternati talora con strati sabbiosi, ma in generale di poca potenza, che contengono « talora in quantità straordinaria resti di piante (filliti), di pesci ecc. (tipica formazione sarmatiana del Tortoniano superiore) ».

Gli stessi riferimenti cronologici si trovano riportati in altre pubblicazioni più recenti dello stesso SACCO e di altri autori, nonchè nei fogli 68, 69 e 80, della carta geologica al 100.000 pubblicati dall' Ufficio Geologico rispettivamente negli anni 1924, 1922 e 1931.

L' esame diretto della roccia che contiene gl' ittioliti studiati dal COSTA dimostra che gli esemplari illustrati da quest' autore con i nomi di *Alosa vulgaris*, *Blennius Craverii* e *Muraena ?* sp. sono tutti racchiusi in un' argilla marnosa di colore giallo chiaro, compatta e terrosa, sottilmente fogliettata, mentre quelli figurati come *Aelia pedemontana* e *Gen. ind.* sono contenuti in strati marnosi di tinta grigio-azzurrognola o bigio-chiara, più arenacei e più ricchi di minute pagliuzze di muscovite.

Premessi questi cenni storici e geologici, che ho ritenuti necessari a chiarire le circostanze, le località e i livelli stratigrafici in cui furono rinvenuti gl' ittioliti dei dintorni di Bra, si può ora passare all' esame particolareggiato di essi.

II.

DESCRIZIONE DEI FOSSILI

1. – Fam **Clupeidae**

Alosa crassa Sauvage

[SAUVAGE H. E. *Mém. sur le faune ichthyologique de la période tertiaire* etc. Ann. Sc. géol., vol. IV, art. 1°, 1873, pag. 243, fig. 67.]

1865. – *Alosa vulgaris* (non Linneo sp.). COSTA O. G. *Bra ed i signori Craveri.* Loc. cit., pag. 398, tav. I, fig. 1.

Tav. I, fig. 1.

L'ittiolito che il COSTA riconobbe giustamente come un avanzo del gen. *Alosa*, e che la fig. 1 della tavola rappresenta a circa i $^5/_6$ della grandezza naturale, è un esemplare incompleto ed alquanto distorto, che nella sua lunghezza complessiva doveva misurare all' incirca 25 cm. Mancano di esso, per la troncatura della roccia, la maggior parte del capo e il tratto posteriore della regione dorsale del tronco. Inoltre, come spesso si verifica nei rappresentanti fossili dei Clupeidi [1]), la testa — a giudicare dalle poche ossa rimaste — non è nella naturale connessione col resto dello scheletro, ma si deve essere spezzata e spostata dopo la morte dell' animale, disponendosi quasi ad angolo retto rispetto all' asse vertebrale, nascondendo probabilmente le prime vertebre addominali ed alterando l' aspetto generale del tratto anteriore del tronco.

Quest' ultimo appare nettamente distinto da tutte le forme congeneri per il suo aspetto meno slanciato e per il profilo addominale fortemente convesso. Anche se si tien conto dello schiacciamento subìto dal fossile, che ha determinato uno spostamento delle squame ed un'apparenza di ancor più spiccata obesità, l' altezza massima del tronco — misurata poco prima dell' origine della dorsale — doveva essere contenuta da 3 volte a 3 volte e mezza nella lunghezza totale, esclusa la coda.

La colonna vertebrale, robusta ed arcuata nel tratto mediano, mostra una quarantina di vertebre, quasi tutte più lunghe che alte e fortemente ristrette nel mezzo, delle quali 17 sono codali. Ma il loro numero complessivo doveva essere alquanto maggiore, giacchè fra le ossa scomposte della testa si scorgono le impronte di altri tre o quattro centri vertebrali anteriori, evidentemente spostati in sèguito alla rottura dal capo, a cui si è accennato. Le neurapofisi e le emapofisi della regione codale sono lunghe, gracili, arcuate e fornite di ossicini secondari. Le spine neurali della regione addominale appaiono ancora più sottili e un poco più brevi ed hanno ossicini secondari più numerosi e più sviluppati. Le coste, molto lunghe, sottili ed arcuate in avanti, giungono fino a breve distanza dal profilo addominale. Come ebbe a notare primieramente l' AGASSIZ [2]) e come recentemente precisò l' ARAMBOURG [3]), di esse le prime si attaccano direttamente al corpo della vertebra, mentre quelle posteriori sono portate da apofisi trasverse,

---

[1]) ARAMBOURG C. *Les poissons foss. d' Oran.* Mat. pour la carte géol. de l'Algerie, 1ª s., paléont., n. 6, 1927, tav. III, fig. 1. — WEILER W. *Ueber das Vorkommen isolierter Köpfe bei fossilen Clupeiden.* Senckenbergiana, vol. 11, 1929, pp. 40-47.

[2]) AGASSIZ L. *Recherches sur les poissons fossiles*, vol. V, p. 2ª, 1844, pag. 111.

[3]) ARAMBOURG C. *Les poiss. foss. d'Oran.* Loc. cit. 1927, pp. 19-20, nota 1.

le quali vanno gradatamente allungandosi, ravvicinandosi e saldandosi, man mano che si procede verso l'indietro, fino a trasformarsi in vere e proprie emapofisi. La forte carena che orlava il profilo addominale è conservata solo per un breve tratto anteriore; appaiono tuttavia qua e là, in rilievo o in impronta, le coste sternali, che s'intercalano tra le coste, di cui hanno all'incirca lo spessore, senza raggiungerne mai la lunghezza. Le più sviluppate tra esse, che sono quelle comprese tra le pettorali e le pelviche, misurano un'altezza uguale ai tre quinti delle coste vicine; le ultime, che precedono la pinna anale, dovevano essere assai brevi. Non è possibile calcolarne il numero complessivo.

Le pinne pettorali, solo parzialmente conservate, dovevano risultare di circa 14 raggi abbastanza lunghi, non molto fittamente articolati e ripetutamente divisi, che sono spezzati nel tratto distale.

Le ventrali, più brevi ed opposte agli ultimi raggi della dorsale, appaiono un po' più vicine all'origine dell'anale che a quella delle pettorali, s'iniziano a livello della 26ª vertebra, a contare dall'indietro, e mostrano 8 o 9 raggi articolati e divisi, ad eccezione del primo che è semplice e alquanto più robusto.

La dorsale, assai frammentaria, si origina all'altezza della 29ª vertebra, contando dalla coda, e mostra il tratto basale di 12 o 13 raggi assai ravvicinati tra loro, forti e ramificati ma evidentemente incompleti.

Pure mal conservata è la pinna anale, che appare molto remota, iniziandosi a livello della 13ª vertebra, contando dall'indietro, ed occupa alla base una estensione di 5 vertebre codali, nella quale sono compresi circa quindici raggi frammentari, che dovevano accorciarsi rapidamente verso la coda ed essere quasi tutti fittamente articolati e ripetutamente divisi. Ma gli ultimi di essi, piegati, spezzati e scomposti, fanno supporre l'esistenza di qualche altro raggio più breve e più prossimo al pedicello codale. Gl'interapofisari sono discretamente forti, e quelli anteriori appaiono longitudinalmente solcati.

La codale, robusta e forcuta, doveva essere compresa cinque volte nella lunghezza complessiva del corpo. Incompleta nel lobo superiore, essa mostra complessivamente 18 grossi raggi, assai fittamente articolati e ripetutamente suddivisi in delicatissime ramificazioni terminali, oltre a tre o quattro raggi semplici, esterni, in ciascun lobo. Gli articoli dei raggi semplici e quelli basali dei raggi divisi sono più larghi che lunghi e separati da linee suturali con andamento sinuoso, a zig-zag; gli articoli delle ramificazioni distali sono invece assai più lunghi che larghi e limitati da suture oblique o meno sinuose.

Le squame sono grandi, sottili, ad orlo posteriore intero, con la faccia interna percorsa da numerosi solchi raggiati, oppure un po' ondulati e quasi paralleli tra loro, che occupano tutta la superficie, da un'estremità all'altra. Soltanto in poche squame delle file anteriori del tronco si scorgono

alcune punteggiature depresse, che occupano la zona centrale della faccia esterna, analogamente a quanto si riscontra in altre specie affini di *Alosa* (per es., *Alosa elongata* Ag.).

Benchè lo stato di conservazione dell' esemplare e le strette analogie esistenti tra le numerose forme cenozoiche di Clupeidi descritte dai vari autori non consentano di eliminare tutti i dubbi circa la determinazione specifica, pur tuttavia l' individuo testè esaminato corrisponde, assai meglio che con le altre specie terziarie ed attuali, con *Alosa crassa* Sauvage — primieramente riscontrata nel deposito miocenico di Orano in Algeria [1]) e successivamente in quelli di Senigallia (marne solfifere) [2]) e del Gabbro (tripoli) [3]) — alla quale ritengo di poterla associare.

Come ho rilevato trattando di queste ultime due ittiofaune, l' *Alosa crassa* Sauv. è affine, secondo le ricerche dell' Arambourg, con *Cl. inflata* Vukotinovic e con *Alosa sagorensis* Steindachner dell' Oligocene e del Miocene, con *A. sculptata* Weiler del Rupeliano e con *Cl. humilis* v. Meyer dell' Aquitaniano e del Sarmaziano [4]). Lo stato frequentemente incompleto di tutte qneste forme non consente peraltro efficaci e sicuri confronti e lascia tuttora nell' ombra i legami di parentela delle Alose terziarie, ben differenziate, almeno in base alle nostre conoscenze odierne, dalle poche specie viventi nei mari attuali.

2. — Fam. **Nyctophidae**

Nyctophus [5]) **(Lampanyctus) microsoma** Sauvage sp.

[Sauvage H. E. *Synopsis poiss. tert. Licata.* Ann. Sc. Nat., Zool. et Pal., vol. XIV, s. 5ª, 1870, pag. 20. — Id. *Mémoire sur la faune ichthyologique* etc. Ann. Sc. géol., vol. IV, art. 1º, 1873, pag. 329, fig. 75 (*Clupea*). — Arambourg C. *Révision des poiss. foss. de Licata.* Ann. de Paléont., vol. XIV, 1925, pag. 82, fig 10 nel testo, tav. VII, fig. 7-9; tav. VIII, fig. 1 a 4 (*Myctophum*)]

---

1) Sauvage H. E. *Mém. sur la faune ichth.* etc. Loc. cit. 1873, pag. 243, fig. 67. — Arambourg C *Les poiss. foss d'Oran.* Loc. cit 1927, pag. 22, tav. I, fig. 4 e 5; tav. II, fig. 2 e 3; tav. III, fig. 1 e 2.

2) D' Erasmo G. *Studi sui pesci neog. d'Italia.* II. *L'ittiofauna foss di Senigallia.* Atti R. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, s 2ª, vol. XVIII, n. 1, 1929, pag. 58, tav. IV, fig. 1.

3) D' Erasmo G. *Studi sui pesci neog. d'Italia.* III. *L'ittiofauna foss. del Gabbro.* Ibidem, s. 2ª, vol. XVIII, n. 6, 1930, pag. 22, tav. I, fig. 1 e 2.

4) Veggansi le citazioni bibliografiche relative a queste specie terziarie in D' Erasmo G. *Loc. cit.* alla nota precedente, 1930, pag. 24.

5) Per le ragioni che m' inducono a preferire *Nyctophus* (Cocco 1838), etimologicamente corretto, in luogo di *Myctophum* (Rafinesque 1810), che rappresenta

1865. - *Blennius Craverii* COSTA O. G · *Bra ed i signori Craveri.* Loc. cit.. pag. 399, tav. I, fig. 2.

Tavola I, fig. 2

L' esemplare, incompleto, che il COSTA attribuì erroneamente al gen. *Blennius* considerandolo come rappresentante di una specie nuova — pur avendo riconosciuto che « non si può definire decisamente e senza tema di errore, mancando i caratteri dell' armatura dentaria, ed una gran parte delle pinne impari » — fu assai inesattamente figurato al n. 2 della citata tavola. Quella illustrazione, infatti, non solo ha completamente trascurato parti, come le pinne pettorali, ventrali ed anale, che sono in buona parte riconoscibili nel fossile, ma dà un' idea erronea della struttura e configurazione della testa e dell' apparato opercolare. Così, ad esempio, lo squarcio boccale appare assai più ridotto di quanto si osservi nel fossile, e l' orbita più piccola e più remota, avendo il disegnatore interpretato quale occhio l' impronta dell' otolito e quindi male rappresentato lo spazio anteriore a quest' ultimo, che in realtà si riferisce ad un' orbita ben grande, quasi circolare, con diametro di gran lunga superiore allo spazio preorbitario ed attraversata dal parasfenoide nel suo quarto inferiore.

Non si può pertanto attribuire alcun valore scientifico alla figura eseguita dal CALYÒ; e, mancando anche ogni descrizione dell' esemplare, la determinazione del COSTA non può essere ritenuta valida ai fini della legge di priorità.

Il fossile in esame (fig. 2), privo dell' ultimo tratto del tronco e della coda, doveva probabilmente raggiungere una lunghezza complessiva di almeno 7 cm., calcolando le parti mancanti. La massima altezza del tronco, pari a 15 mm., si trova a livello della inserzione delle pinne pettorali; tanto il profilo dorsale quanto quello ventrale sono leggermente convessi, ed il corpo va assai lentamente assottigliandosi verso l' indietro, misurando un' altezza di 10 mm. al livello dell' origine della pinna anale. La lunghezza della testa con l' apparato opercolare è di 20 mm., cioè uguale quasi alla metà del tratto compreso tra l' estremo anteriore del muso e l' inserzione dell' anale. Il profilo anteriore del capo è arrotondato ed il muso piuttosto ottuso. L' orbita, grossa ed arrotondata, è assai prossima al profilo frontale ed ha un diametro che supera i 5 mm. Lo squarcio boccale, assai ampio, giunge al di là dell' orlo posteriore dell' orbita; ha mandibola bassa e non

---

un errore tipografico, cfr.: BASSANI F. *La ittiofauna delle argille* ecc. *di Taranto e di Nardò.* Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., s. 2ª, vol. XII, n. 3, pag. 20. Napoli, 1905. - D' ERASMO G. *Studi sui pesci neogenici d' Italia.* II. *L' ittiofauna fossile di Senigallia.* Ibidem, s. 2ª, vol. XVIII, n. 1, pag 19. Napoli, 1929.

preminente, ed è superiormente orlato da lunghi e sottili premascellari. Scarse tracce di minuti denti conici sono visibili solo a forte ingrandimento. L' apparato opercolare è discretamente sviluppato e termina posteriormente in un angolo ottuso. L' otolito non è conservato, ma appare assai netta, in incavo, l'impronta di esso, a contorno pressochè ovale, con polo anteriore più acuto.

La colonna vertebrale, leggermente concava verso l' alto, conserva 24 vertebre, delle quali 15 addominali. Calcolando quelle mancanti, comprese tra la fine della pinna anale ed il pedicello della coda, si può ritenere che dovesse essere complessivamente costituita da 33 a 35 centri discretamente sviluppati, un poco incavati e generalmente più lunghi che alti. Le coste, in numero di 12 paia, appaiono forti, arcuate e appiattite nel tratto prossimale. Quelle comprese nello spazio tra le pettorali e le ventrali sono abbastanza lunghe; quelle posteriori alle pinne pelviche si accorciano assai rapidamente. Le ultime sono portate da apofisi trasverse gradatamente più sviluppate. Le spine neurali sono piuttosto brevi, oblique e incurvate verso l' indietro nella regione addominale; più lunghe, più forti, più diritte nel tratto caudale, al pari delle corrispondenti spine emali. Si scorgono qua e là deboli impronte di ossicini secondari.

Le pinne pettorali mostrano 11 raggi lunghi e divisi, preceduti da uno più corto, semplice e forte. Molto sottili e addossati gli uni agli altri, essi raggiungono, con le loro estremità distali filiformi, l' origine delle ventrali. Queste sono opposte ai primi raggi dorsali; appaiono sensibilmente più forti delle pettorali, ma costituite da un numero minore di raggi (sei o sette), ripetutamente divisi, che, per quanto non integralmente conservati, mostrano le delicate ramificazioni terminali giungenti al livello dell' origine dell' anale. Sono pure riconoscibili le ossa pelviche, forti e diritte, che raggiungono una lunghezza di quattro corpi vertebrali.

La dorsale, piuttosto breve, occupa il tratto mediano del profilo dorsale, è discretamente alta anteriormente ma obliquamente troncata all' indietro, ed ha un' estensione basale di sette vertebre. Risulta complessivamente di 13 raggi, dei quali i tre anteriori, rapidamente crescenti in altezza, appaiono semplici, mentre tutti gli altri, accorciantisi verso l'indietro, sono ramificati e divisi in articoli assai più lunghi che larghi. I maggiori fra essi raggiungevano uno sviluppo che corrisponde alla massima altezza del tronco. Gli interneurali, discretamente forti e dilatati in lamelle, sono diritti o a leggera concavità posteriore, e, ad eccezione del primo — che è assai breve e molto obliquamente disposto — vanno lentamente accorciandosi verso l' indietro.

L' anale, incompletamente conservata per la troncatura posteriore della roccia, ha la sua origine quasi opposta alla fine della dorsale, di cui è soltanto un poco più remota, e mostra, nel tratto conservato, gli avanzi di

una diecina di raggi spezzati, sostenuti da altrettanti interemali gradualmente decrescenti verso l'indietro.

Nulla di preciso può affermarsi sui caratteri delle squame e dei fotofori, generalmente non conservati.

Il frammento testè descritto, per quanto incompleto, di modeste dimensioni e privo di caratteristiche salienti, appare tuttavia facilmente riconoscibile come un rappresentante della fam. *Nyctophidae (= Myctophidae)* per la forma particolarmente elevata del capo, per l'ampiezza dell'orbita, per la profondità dello squarcio boccale, oltre che per la posizione della pinna dorsale opposta allo spazio tra le ventrali e l'anale, per lo sviluppo dell'otolito e per altri caratteri osteologici secondari. Meglio che con tutte le altre specie di *Nyctophus* riconosciute nelle ittiofaune mioceniche di Senigallia, Mondaino, Gabbro, Racalmuto, Licata, Orano ecc. [1]), esso corrisponde con *Nyctophus (Lampanyctus) microsoma* Sauvage sp., diffuso in tutti i giacimenti predetti [2]), del quale mostra tutte le particolarità scheletriche. Lo attribuisco pertanto a questa specie, anche se per deficienza di conservazione non sono riconoscibili le squame e, di conseguenza, i f tofori, che, secondo l'opinione concorde degli autori, sono del resto estremamente sottili, di piccole dimensioni e perciò molto raramente distinguibili nei numerosi rappresentanti di *Nyctophus (Lampanyctus) microsoma* finora descritti.

---

[1]) Studi recenti hanno dimostrato che il gen *Nyctophus* è largamente rappresentato nei terreni terziari non solo europei ed africani, ma anche americani, e che le forme più numerose spattano agli orizzonti miocenici. - Si confrontino, fra gli altri, i lavori seguenti: WEILER W. *Die fischfauna der unteren und oberen Meeresmolasse Oberbayerns.* Neues Jahrb. für Min. etc. Beilagebd. 68, Abt B, 1932, pag. 335. — DAVID L. R. *Miocene fishes of southern California.* Spec. papers Geol. Soc. of Amer., n. 43, 1943, pp. 62-70.

[2]) Oltre ai lavori di SAUVAGE, ARAMBOURG, D'ERASMO, innanzi citati, si consultino anche le pubblicazioni seguenti: ARAMBOURG C. *Les poissons foss. d'Oran.* Matériaux pour la carte géol. de l'Algerie, 1ª s., n. 6, pag. 48, tav. VII. fig. 5-18. Algeri, 1927. — D'ERASMO G. *Studi sui pesci neogenici d'Italia* I. *L'ittiofauna fossile di Racalmuto in Sicilia.* Giorn. Soc. Sc. nat ed econ., vol. XXXV, pag. 85. Palermo, 1928. — D'ERASMO G. *Studi sui pesci neogenici d'Italia.* III *L'ittiofauna fossile del Gabbro.* Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., s. 2', vol XVIII, n. 6, pag. 47. tav. II, fig. 8. Napoli, 1930. — MINIERI V. *Su alcuni ittioliti miocenici dei tripoli di Mondaino.* Boll. Soc. Natur., vol. LXI, 1952 (in corso di stampa).

3. Fam. **Trichiuridae**

Lepidopus proargenteus Arambourg

[ARAMBAURG C. *Les poissons fossiles d'Oran.* Mat. pour la carte géol. de l'Algérie, 1ª s., Paléont., n. 6, pag. 175, tav. XXX, fig. 1; tav. XXXI, fig. 1 a 3. Algeri, 1927].

1865. — *Muraena?* sp. COSTA O. G. *Bra ed i signori Craveri.* Loc. cit., pag. 399, tav. I, fig. 3.

Tav. I, fig. 3.

Il frammento in esame, che il COSTA dice « consistente in una mandibola lunga guarnita in tutta la sua lunghezza di denti numerosi, piccoli e stivati, avendone due lunghi ed alquanto incurvati verso la branca articolare », non appartiene alla mascella inferiore, bensì a quella superiore, e deve ritenersi quale premascellare. È facile convincersene, esaminando il margine orale, che è alquanto concavo e non rettilineo, e la forma generale dell' osso, che, simile ad una falce, degrada regolarmente nella sua altezza dalla sinfisi fino all' estremo posteriore, appuntato. Anche il margine superiore, che doveva essere a diretto contatto col mascellare, è leggermente arcuato.

Figura schematica del premascellare di *Lepidopus argenteus* Bonn. viv. nel Medit. (in alto) e di *Lep. proargenteus* Aramb. del Mioc. di Bra (in basso).

La figura data dal COSTA è capovolta, ed il tratto occupato dai due denti più lunghi, che egli considera porzione articolare, è invece il tratto anteriore dell' osso, prossimo alla sinfisi.

Un semplice confronto tra il piccolo avanzo del Terziario piemontese ed il premascellare di *Lepidopus argenteus* Bonnaterre (= *L. caudatus* Euphrasen) vivente, illustrato dall' AGASSIZ — quale può agevolmente farsi esaminando le figure schematiche intercalate — è abbastanza dimostrativo, non solo per la giusta interpretazione dell' osso, ma anche per la spettanza di esso al gen. *Lepidopus* Gouan.

Il fossile, rappresentato in grandezza naturale alla figura 3 della tavola, misura 35 mm. nella sua massima lunghezza, e raggiunge un' altezza di circa 7 nel tratto più elevato, che corrisponde quasi all' inserzione del secondo dei due denti maggiori. I denti, piantati in alveoli non molto profondi, sono conservati solo in piccola parte. Non è tuttavia difficile stabilirne il numero ed i caratteri, in base alle impronte rimaste. Conici, appuntati, un poco compressi ai lati e alquanto spaziati fra loro, essi dovevano essere in

numero di 18 nei quattro quinti posteriori del premascellare, e quasi equidistanti, essendo solo gli anteriori appena un poco più ravvicinati fra loro. A giudicare dall'andamento di quelli conservati e dal proporzionale sviluppo degli infossamenti alveolari, si può anche ritenere che, per quanto quasi insensibilmente, la loro grandezza dovesse crescere dall'indietro in avanti nel terzo posteriore dell'osso e poi lentamente decrescere ancora verso l'innanzi: misurando, nell'altezza della loro corona, da 1,5 a 2 mm. Il quinto anteriore dell'orlo orale è occupato da due grossi denti, a guisa di canini, e, nell'intervallo tra essi, si scorgono le impronte della parte basale di altri tre denti minori, verosimilmente identici a quelli che orlavano quasi tutto l'osso. I due grossi denti anteriori, che si può dire siano i soli interamente conservati, raggiungono un'altezza di circa 5 mm. e sono separati alla base da un intervallo di 4 mm. e mezzo. Compressi, con gli orli anteriore e posteriore assottigliati e quasi taglienti, questi due denti sono leggermente ricurvi verso l'interno, presentano lievissime striature verticali solo nel tratto basale e non mostrano dentellature presso l'apice della corona.

L'avanzo descritto, per quanto limitato ad un semplice premascellare, offre tuttavia caratteri così peculiari e così perfettamente corrispondenti con quelli del gen. *Lepidopus* Gouan, che non esito a riferirlo ad esso.

Com'è noto, questo genere, ascritto da Cuvier et Valenciennes alla fam. *Scombridae* e considerato in un primo tempo come tale anche dal Woodward, ne venne separato dal Günther, il quale costituì, con esso e con pochi altri generi affini, la fam. *Trichiuridae*.

Conosciuto, allo stato fossile, fin dall'Oligocene, esso è abbastanza diffuso nei depositi miocenici tanto europei che africani, ed è rappresentato nei mari attuali da parecchie specie, una delle quali vive nel Mediterraneo (*L. argenteus* Bonnaterre) [1]. Come si rileva dalla figura schematica innanzi riportata, il premascellare di quest'ultima specie si distingue principalmente per avere *tre* grossi denti adunchi, in luogo di *due*, nel tratto anteriore.

Tra le specie fossili, quella che corrisponde esattamente — sia nelle dimensioni che nei caratteri dei denti — con il frammento del Miocene piemontese è senza dubbio il *Lepidopus proargenteus* Arambourg, riscontrato nel Saheliano di Oran in Algeria e probabilmente vissuto pure nel

---

[1]) Secondo le osservazioni di H. E. Sauvage (*Mém. sur la faune ichthyolog.* etc. *Poiss. foss. d'Oran et de Licata* Ann. des Sc. géol., vol. IV, 1873, pag. 122), il *Lep. caudatus* Euphrasen (= *Lep. argenteus* Bonnaterre), è un pesce d'alto mare, vivente abitualmente a mediocre profondità, che si accosta alle rive nei mesi di aprile e maggio. Esso abita il Mediterraneo e una gran parte dell'Atlantico; è stato segnalato sulle coste inglesi, nel golfo di Guascogna, al Capo di Buona Speranza ecc. Il Griffini (*Ittiologia ital.*, 1903, pag. 384) lo dice anche abbastanza frequente nei mari italiani.

Miocene superiore di Licata in Sicilia [1]). Come ebbe ad osservare il paleontologo francese fondatore di questa specie, essa si distingue, per quanto riguarda i premascellari, per « une serie de petites dents pointues régulièrement espacées, comprimées latéralement, tranchantes, légèrement recourbées vers l' intérieur de la bouche et portant de fines stries verticales (17 dents sur le prémaxillaire): celles du milieu sont légèrement plus grandes que les autres. En avant de la mâchoire supérieure, il existe de chaque côté deux grands crochets un peu recourbés, comprimés, tranchants, striés et à pointe barbelée. Sur l' individue de Raz-el-Ain, la même disposition générale peut s' observer, mais les deux crochets antérieures de la mâchoire supérieure sont séparés par un petit espace occupé par quelques petites dents comme celles du reste de la mâchoire » (*Loc. cit.* 1927, pag. 176).

Altri resti fossili di *Lepidopus* sono stati segnalati, com' è noto, in vari giacimenti italiani; ma o riguardano forme di minore statura, che appaiono specificamente distinte per avere i premascellari con denti meno numerosi e più forti, oppure si tratta di avanzi che non consentono alcun confronto, non conoscendosi i premascellari. Fra le prime ricordo, ad esempio, il *Lep. Albyi* Sauvage, riscontrato nel Miocene superiore di Licata [2]), di Mondaino [3]) e del Gabbro [4]); fra i secondi, il *Lepidopus dubius* Heckel, rappresentato nelle marne stampiane di Ales in Sardegna da pochi avanzi di mandibole e di denti isolati [5]). Secondo il Bassani [6]), le argille marnose pleistoceniche di Nardò, in Terra d' Otranto. contengono frammenti attribuibili al vivente *Lepidopus caudatus* Euphr. sp. = *Lep. argenteus* Bonnat.).

---

[1]) Arambourg C. *Révision des poiss. foss. de Licata.* Ann. de Paléont., vol. XIV, 1925, pag. 109. — Id. *Les poiss. foss. d' Oran.* Loc. cit 1927, pag. 177.

[2]) Sauvage H. E. *Op cit.* 1873. pag. 128, fig. 25. 25*a*. — De Stefano G. *I pesci fossili di Licata in Sicilia.* Mem per serv alla descr. carta geol d' It., vol. V, p. 1ª, pag. 73, tav. XIII, fig. 7; tav. IX, fig. 1 e 2. — Arambourg C. *Rév. poiss. foss. Licata* Loc cit. 1925, pag 106. tav VIII, fig. 5 e 6; tav. IX. fig. 1.

[3]) Bonomi I. *Contributo alla conoscenza dell' ittiofauna miocenica di Mondaino.* Riv. it di Pal., anno II, 1896, pag. 34. — Arambourg C. *Op. cit.* 1925, pag. 107 e 123.

[4]) D' Erasmo G. *L' ittiofauna foss. del Gabbro.* Loc. cit. 1930, pag. 59, tav. II, fig. 13-15.

[5]) Bassani F. *Su alcuni avanzi di pesci delle marne stampiane del bacino di Ales in Sardegna.* Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, 1900, pp. 192-193.

[6]) Bassani F. *La ittiofauna delle argille marnose plistoc. di Taranto e di Nardò.* Atti R. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, s. 2ª, vol. XII, n. 3, 1905, pag. 48.

4. – Fam. **Cyprinodontidae**

Pachylebias crassicaudus (Agassiz) A. S. Woodward

[Agassiz L. *Rech. sur les poiss. foss.*, vol. V, p. 2ª, 1839, pag. 56, tav. XLI, fig. 11 e 12 (*Lebias*). – Woodward A. S. *Cat foss. fishes Br. Mus.*, p. IV, 1901, pag. 275 (*Pachylebias*).]

1867. – *Aelia pedemontana.* Costa O. G. *Seconda memoria sui pesci fossili di Bra.* Loc. cit., pag. 6, tav. II, fig. 2 e 2A.
1867. – Gen. ind. Costa O. G. *Ibidem*, pp. 4 e 7, tav, II, fig. 3.

Tav. I, fig. 4 e 5.

L'esemplare, che nel 1867 servì al Costa come tipo della sua nuova specie *Aelia pedemontana,* è un rappresentante evidentissimo della più diffusa forma fossile di Ciprinodonte che sia stata finora riscontrata nelle marne mioceniche del Piemonte, della Toscana, delle Marche, della Sicilia, ecc. e, fuori d'Italia, a Creta e altrove, e che, illustrata dapprima dall'Agassiz col nome di *Lebias crassicaudus,* venne più tardi giustamente considerata come spettante ad un genere distinto (*Aelia* in O. G. Costa, 1856; *Prolebias* in H. E. Sauvage, 1874; *Pachylebias* in A. S. Woodward, 1901) sopratutto per la considerevole robustezza della colonna vertebrale. Lo stesso Costa, del resto. ne aveva riconosciuto, alla pag. 4 della sua citata memoria del 1867, gli stretti rapporti con la specie dell'Agassiz « tanto comune in Italia, specialmente nelle gessaie marchigiane », pur avendo errato nel valutare i motivi della distinzione generica, ch'egli fonda sopratutto sulla presunta mancanza dei denti (i quali sono invece riconoscibili negli esemplari meglio conservati). Ed anche nei dintorni di Bra egli la considera come la più abbondante, attribuendo ad essa almeno sei degli otto esemplari avuti in comunicazione dai fratelli Craveri in sèguito agli scavi effettuati nella primavera del 1865.

L'esemplare illustrato dal Costa, che la fig. 4 riproduce in grandezza naturale, è lungo 76 mm. ed alto 14 all'inizio della pinna dorsale; ha il profilo dorsale leggermente convesso e quello ventrale quasi rettilineo, e presenta un pedicello codale alto un po' più di 8 mm. La lunghezza della testa con l'apparato opercolare sorpassa la massima altezza del tronco ed è contenuta tre volte e mezza nella lunghezza del corpo, esclusa la pinna codale. Per quanto le ossa della testa siano, almeno in parte, fratturate e spostate, sono riconoscibili a forte ingrandimento alcuni denti conici, minuti e fittamente disposti, che armavano i premascellari e il dentario, e sono

visibili le ossa opercolari, abbastanza estese, e pochi ma forti raggi branchiosteghi. L'orbita, arrotondata, ha un diametro quasi uguale allo spazio preorbitario ed è attraversata dal parasfenoide a metà della sua altezza.

La colonna vertebrale, pur essendo parzialmente nascosta dal rivestimento squamoso, mostra chiaramente la robustezza della sua costituzione, che si rivela tanto nello sviluppo proporzionale delle vertebre quanto in quello delle spine neurali ed emali, nonchè delle coste. Le vertebre dovevano essere una trentina, di cui poco più della metà sono codali.

Le pinne pettorali hanno 14 o 15 raggi sottili ma lunghi, dei quali rimangono il tratto basale e pochi frammenti delle ramificazioni terminali. Le ventrali, più vicine all'anale che alle pettorali, appaiono assai più delicate, mostrando solo 6 raggi, che con le loro estremità non raggiungono l'origine dell'anale.

La pinna dorsale, che è un po' più remota delle pelviche, s'inizia a metà dello spazio che divide l'occipite dal pedicello codale; occupa alla base un tratto uguale alla lunghezza di quattro vertebre e mezza, e risulta di nove o dieci raggi, dei quali i primi tre appaiono semplici e rapidamente crescenti in altezza; il quarto è il più lungo, il più forte nel tratto basale, articolato e ramificato in quello distale; tutti gli altri, pure articolati e divisi, si accorciano notevolmente verso l'indietro.

L'anale, benchè conservata per la massima parte in impronta, ripete all'incirca i caratteri della dorsale; ha la sua origine opposta alla fine di questa pinna, ed appare costituita da una diecina di raggi fittamente articolati e rapidamente decrescenti verso la coda.

La codale, tronca, ha una lunghezza che eguaglia quella del capo con l'apparato opercolare e mostra una costituzione particolarmente robusta, risultando, in ciascun lobo, di otto piccoli raggi semplici esterni, man mano più lunghi, e di una diecina di raggi principali, ripetutamente ramificati. Questi ultimi sono fittamente articolati già a poca distanza dalla base; e gli articoli, che nella metà prossimale sono assai più larghi che lunghi, si fannno più lunghi che larghi nelle ramificazioni distali. Le suture interarticolari sono diritte o alquanto ondulate. Le squame sono grandi, spesse, cicloidi, percorse da fitte strie concentriche di accrescimento.

L'altro individuo (fig. 5), che il Costa indicò con frase ambigua come « del tutto simile al già descritto, ma nondimeno essenzialmente diverso », è in realtà, al pari del precedente, un rappresentante di *Pachylebias crassicaudus* (Ag.) Woodward, com'è dimostrato da un esame minuzioso di tutti i carattteri rilevabili. Manca esso del tratto anteriore del capo per la troncatura della roccia, e quindi quasi nulla può dirsi dello squarcio boccale e dei denti, di cui tuttavia rimangono scarsi avanzi, visibili al microscopio binoculare; ma la costituzione della colonna vertebrale e delle coste, la posizione e lo sviluppo relativo delle pinne, la configurazione e

le proporzioni generali del corpo si corrispondono perfettamente. Il presunto carattere differenziale rilevato dal Costa, che consisterebbe in « una pinna dorsale che comincia a sorgere dalla nuca e si stende fino al peduncolo codale, e che sembra suddividersi in tre lobi, il medio dei quali, più alto, ed il posteriore, gradatamente abbassandosi, si arresta sulla diciannovesima vertebra », è assolutamente insussistente. La pinna dorsale è identica a quella dell' esemplare precedente: s' inizia a metà del tronco, cioè ad uguale distanza dall' occipite e dal pedicello codale, e risulta complessivamente costituita da una diecina di raggi, dei quali i primi due o tre semplici, e gli altri articolati e divisi. Gli altri raggi, che nella fig. 3 del citato lavoro di O. G. Costa precedono e seguono la pinna dorsale, formando quasi due lobi distinti da essa, sono completamente immaginari e rappresentano un errore d' interpretazione del disegnatore, che deve aver considerato e figurato quali raggi le ineguaglianze del profilo dorsale dovute al rivestimento squamoso.

Anche l'altro rilievo fatto dal Costa circa la maggiore lunghezza, in questo esemplare, della pinna anale, che sarebbe « opposta alla porzione mediana della dorsale », non ha alcuna consistenza. Effettivamente l' anale s' inizia opposta alla fine della dorsale e risulta di nove raggi fittamente articolati e divisi per due terzi della loro estensione. L' apparente maggiore sviluppo di questi è esclusivamente dovuto alla loro migliore conservazione.

Occupandomi in precedenti lavori del *Lebias crassicaudus* Ag. — che ho riscontrato largamente rappresentato in altre ittiofaune mioceniche italiane, nell' orizzonte delle marne gessose sovrastanti agli scisti tripolacei, nelle quali si presenta spesso associato con numerose altre specie di Ciprinodonti dello stesso genere o di genere strettamente affine — io ritenni dapprima di poter ascrivere la maggior parte di questi piccoli ittioliti al gen. *Pachylebias* A. S. Woodward (1901), volendoli tenere distinti dal vivente gen. *Lebias* sopratutto per la notevole iperostosi dell' asse vertebrale che essi presentano [1]). Più tardi, esaminando i rappresentanti della medesima specie nelle coeve ittiofaune di Senigallia nelle Marche e del Gabbro in Toscana, m' accorsi che due di essi, provenienti da Senigallia e da Mondaino, erano già stati studiati ed illustrati nel 1856 dal Costa col nome di *Aelia picena* in una pubblicazione (*Ittiologia fossile italiana.* Napoli, 1855 a 1867) [2]) che, stampata a dispense, in poche copie ed a spese dell' autore,

---

1) D' Erasmo G. *Studi sui pesci neogenici d'Italia. I. L'ittiofauna di Racalmuto in Sicilia.* Giorn. Soc. Sc. nat. ed econ., vol. XXXV, pp. 97-105. Palermo, 1928.

2) *L' ittiofauna fossile italiana* di O. G. Costa porta sul frontespizio l' indicazione 1853-60; ma, come avrò occasione di dimostrare in un prossimo lavoro di revisione dell' opera paleontologica di quel naturalista, le sei dispense che la

era rimasta ignorata dalla maggior parte dei paleontologi; e conclusi che per ragioni di priorità la specie in discorso dovesse indicarsi col nome di *Aelia crassicauda* Ag. sp. [1]. Ignoravo però in quel tempo, che il nome *Aelia* fosse stato preimpiegato, nella nomenclatura zoologica, da FABRICIUS (1803) per un genere di Rincoti e da AGASSIZ (1846) per altro genere di Pesce. Accolgo pertanto l'opinione del dr. WHITE [2] sostituendo *Aelia* Costa (1860) con *Pachylebias* Woodward (1901). Non posso infatti considerare valido il gen. *Physocephalus* Costa (1856), ch'io ritengo sinonimo di *Aelia* e quindi di *Pachylebias,* perchè fondato dal naturalista leccese su due esemplari di Senigallia mal conservati e non esattamente determinabili [3].

5. — **Fam. ind.**

1867. — *Gobius Craverii.* COSTA O. G. *Seconda memoria sui pesci fossili di Bra.* Loc. cit., pag. 5, tav. II, fig. 1 e 1 *A*.

Dopo quello che si è rilevato nelle pagine precedenti circa la scarsa esattezza del disegno nelle figure che accompagnano le due note di O. G. COSTA sugli ittioliti di Bra, parmi affatto inutile indagare sulla effettiva costituzione e sulle affinità del cosiddetto *Gobius Craverii*, che, come si è innanzi detto, è l'unico esemplare da me non rinvenuto nelle collezioni del Museo geo-paleontologico di Napoli.

L'ittiolito, che appare schiacciato dorso-ventralmente nella metà anteriore ed è invece visibile di fianco nella regione codale, non consente di eliminare tutti i dubbi sulla posizione e sullo sviluppo delle diverse pinne. Si aggiunga che esistono varie contraddizioni fra i caratteri descrittivi esposti dal COSTA e quelli rilevabili dalla figura, e si comprenderà quanto sia giustificato il mio riserbo nello esprimere un giudizio obiettivo su questo esemplare ormai introvabile.

---

costituiscono videro la luce dal 1855 (I e II) al 1867 (VI). La III dispensa (pp. 25-40, con tav. III), che comprende la descrizione del gen. *Aelia*, fu pubblicata nel 1856.

[1] D'ERASMO G. *L'ittiofauna foss. di Senigallia.* Loc. cit. 1929, pag. 62. — ID. *L'ittiofauna foss. del Gabbro.* Loc. cit. 1930, pag. 93.

[2] WHITE E. I. e MOY THOMAS. J. A. *Notes on the nomenclature of fossil fishes.* Parte I. *Homonyms A — C.* Ann. and Mag. Nat. Hist, s. 11, vol. V, pag. 505, Londra, 1940.

[3] COSTA O. G. *Ittiologia foss. ital.*, pag. 40, tav. III, fig. 13 (non fig. 8) Napoli, 1856. — D'ERASMO G. *Loc. cit.* 1929, pag. 64, tav. IV, fig. 4.

III.

CONCLUSIONE

La revisione degli ittioliti miocenici di Bra studiati da O. G. Costa e conservati nel Museo geo-paleontologico di Napoli aveva sopratutto lo scopo, già esposto nell' introduzione di questa nota, di stabilirne l' effettiva consistenza e di precisarne la determinazione tassonomica. Per quanto non si possa avere la pretesa di fondare sicure conclusioni ecologiche e cronologiche su avanzi così scarsi, pur tuttavia non è inutile far rilevare che le poche specie, che sono state riconosciute, le quali rappresentano quattro distinte famiglie, sono tutte note in giacimenti del Miocene medio e superiore o esclusive di quest' ultimo piano, corrispondendo con quelle riscontrate nelle ittiofaune del Gabbro, di Mondaino, di Senigallia, di Racalmuto, di Licata ecc. Tre di esse (*Alosa crassa, Nyctophus microsoma* e *Lepidopus proargenteus*), cioè quelle rinvenute nel 1864 ai piedi della collina di Santa Vittoria, sono forme essenzialmente marine e pelagiche, anche se si riferiscono a famiglie migratrici, che possono venire in epoche determinate dall' alto mare verso la riva, passando pure talvolta nelle acque dolci (come i Clupeidi), o rimontare dalle profondità alla superficie e avvicinarsi alle coste durante la notte (come i Nictofidi), o vivere tanto nelle acque profonde quanto in prossimità della costa (come i Trichiuridi). Può puindi ritenersi confermata l' opinione del Sacco che « il periodo di deposizione dei banchi messiniani fu in queste regioni un periodo di mare poco profondo, passando spesso a vera maremma ». Carattere etologico diverso presentano invece gli altri due esemplari *(Pachylebias crassicaudus)* scoperti nel 1865 presso il Castello della Volta, i quali, essendo riferibili, come si è visto, alla famiglia dei Ciprinodontidi, si rivelano come abitatori delle acque salmastre, delle lagune e delle foci dei fiumi, denotando un deposito avvenuto in condizioni topografiche localmente differenti e un orizzonte cronologico probabilmente alquanto diverso.

Queste conclusioni, esclusivamente fondate sullo studio dei pochi resti ittiolitici dei dintorni di Bra esaminati nel presente lavoro, dovrebbero essere convalidate, per poter acquistare un maggior grado di attendibilità e di sicurezza, dall' esame degli altri fossili, macroscopici e microscopici, che li accompagnano nei singoli livelli. A me basta per ora aver chiarito l' effettiva consistenza delle specie stabilite da O. G. Costa e aver messo in rilievo i rapporti esistenti tra gli scarsi ittioliti miocenici piemontesi e i più ricchi depositi coevi di tante altre regioni italiane (Toscana, Marche, Sicilia ecc.), in cui vissero forme identiche o strettamente affini e si verificò uno stesso ordine di fenomeni, concomitanti e successivi alla graduale regressione marina che chiuse la serie stratigrafica del Miocene.

Napoli, Istituto geo-paleontologico dell' Università, maggio 1952.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. — *Alosa crassa* Sauvage. Esemplare incompleto, visto dal lato sinistro, a circa i $^5/_6$ della grandezza naturale.

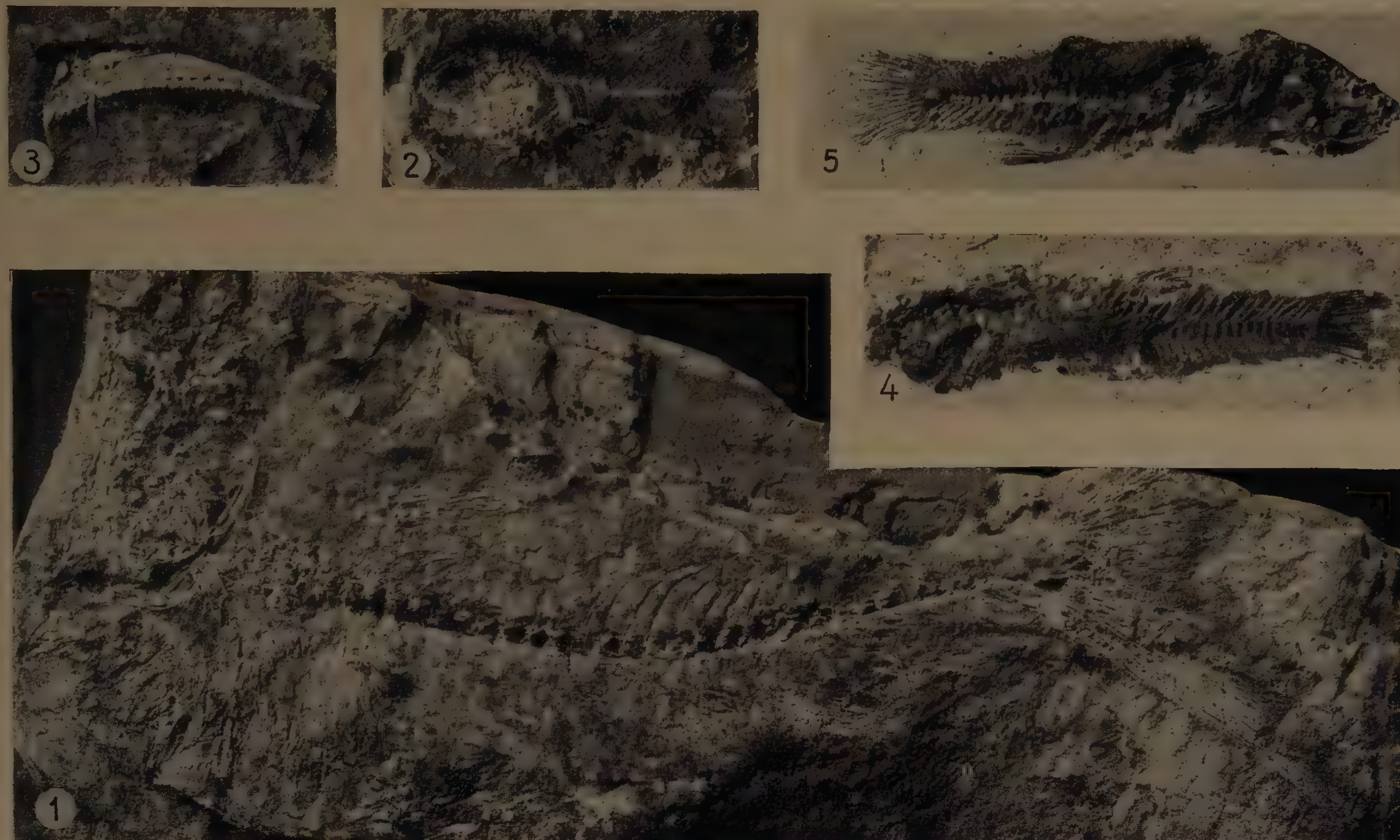
Fig. 2. — *Nyctophus (Lampanyctus) microsoma* Sauvage sp. Esemplare incompleto, visto dal lato sinistro, in grandezza naturale.

Fig. 3. — *Lepidopus proargenteus* Arambourg. Premascellare, in grandezza naturale.

Fig. 4. — *Pachylebias crassicaudus* (Agassiz) A. S. Woodward. Esemplare quasi completo, visto dal lato sinistro, in grandezza naturale.

Fig. 5. — *Pachylebias crassicaudus* (Agassiz) A. S. Woodward. Esemplare anteriormente incompleto, visto dal lato destro, in grandezza naturale.

Tutti gli esemplari si conservano nel Museo geo-paleontologico dell' Università di Napoli.


3
2
5
4
1

Calcolo numerico: Ricerca di una funzione armonica soggetta a condizioni al contorno non lineari [1]

Nota del dott. **Peter Lesky** *presentata dal socio* **M. Picone**

(Adunanza del dì 7 giugno 1952)

Sunto. – Si applica ad un problema armonico con condizioni al contorno non lineari un procedimento di approssimazioni successive che lo riconduce alla soluzione di una successione di problemi lineari.

1. Prendiamo in considerazione un problema di conduzione del calore, nel quale la distribuzione delle temperature u soddisfa alle condizioni

$$\begin{aligned} \Delta_2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad & \text{in } D \\ \frac{du}{dn} = \frac{\alpha}{\lambda}(u - \theta) \qquad & \text{su } FD, \end{aligned} \tag{1}$$

dove n è la normale interna, θ la temperatura esterna assegnata, λ il coefficiente di conducibilità termica interno ed α il coefficiente di irraggiamento.

λ può essere assunto costante, mentre α, come è indicato dalla esperienza, non può essere considerato tale. A questo scopo prendiamo in considerazione una legge di dipendenza empirica di tale coefficiente di irraggiamento dalle temperature al contorno indicata in un lavoro di F. Guye, « *Berechnung der Waermeverluste des Drehofenmantels durch Strahlung und Konvektion* » [2]).

In generale si può approssimare questa legge ricavata dall' esperienza mediante una parabola di ordine n opportunamente grande. In questo caso è sufficiente far uso di una parabola di secondo ordine:

$$\alpha(u) = 7{,}585 + 0{,}0236\, u + 0{,}0000823\, u^2 \tag{2}$$

dato il grado di approssimazione ($0{,}5^0$ nell' intervallo $0^0 - 400^0$C) che si vuol raggiungere.

Volendo tener conto di questa dipendenza del tutto generale si presenta

[1]) Lavoro eseguito nell' Istituto Nazionale per le Applicazioni nel Calcolo.

[2]) Radex Rundschau. Radenthein 1949, 5 Heft.

il problema non lineare della risoluzione delle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } D \\ \frac{du}{dn} &= a(Q\,,u)\cdot u + b(Q) && \text{su } FD \end{aligned} \tag{3}$$

con

$$a(Q\,,u) = a_0(Q) + a_1(Q)u + a_2(Q)u^2 + \ldots + a_{n-1}(Q)u^{n-1} + a_n u^n, \tag{4}$$

Q indicando un punto su FD.

2. Usufruiamo di un procedimento di approssimazioni successive che riconduce il problema non lineare alla soluzione di una successione di problemi lineari.

Determiniamo dapprima, in relazione all'intervallo di temperature assegnate, un valore medio opportuno costante di a, $a(Q\,,u_0)$. Si perviene così, per una prima approssimazione, alle equazioni lineari

$$\Delta u = 0 \text{ in } D; \quad \frac{du}{dn} = a(Q\,,u_0)\cdot u + b(Q) \text{ su } FD.$$

Come soluzione di queste otteniamo una distribuzione di temperature $u_1(P)$. Di questa funzione interessano i valori assunti su FD, $u_1(Q)$, i quali si sostituiscono nella (4) ottenendo per $a(Q\,,u_1)$ una nuova espressione in funzione solo di Q che ci conduce alle equazioni lineari

$$\Delta u = 0 \text{ in } D; \quad \frac{du}{dn} = a(Q\,,u_1)u + b(Q) \text{ su } FD.$$

Dalla distribuzione di temperature u_2, ricavata come soluzione di questo problema, possiamo ottenere l'espressione di $a(Q\,,u_2)$ colla quale dedurremo una terza approssimazione, risolvendo le equazioni

$$\Delta u = 0 \text{ in } D; \quad \frac{du}{dn} = a(Q,u_2)u + b(Q) \text{ su } FD.$$

Procedendo così di seguito si può ottenere un grado di approssimazione arbitrario, ammesso che il procedimento indicato converga verso la soluzione.

3. La soluzione delle equazioni lineari indicate in 2. si può ottenere nel modo migliore con un metodo di PICONE [3]). In proposito facciamo le seguenti osservazioni:

---

[3]) P. LESKY, Pubbl. dell'Ist. per le appl. del calcolo, 281.

D sia un dominio semplicemente connesso,
$a(Q)$ e $b(Q)$ siano funzioni continue di Q su FD,
$a(Q) > 0$.

Indichiamo con $\{\omega_k(P)\}$ il sistema di polinomi omogenei

$$R(x+iy)^h \quad , \quad I(x+iy)^h$$

e poniamo

$$\{\Psi_k\} = \left\{ \frac{d\omega_k}{dn} - a(Q)\,\omega_k \right\} \qquad \text{su } FD.$$

Se si assume

$$u^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} a_k^{(m)} \omega_k ,$$

dove le $a_k^{(m)}$ sono da determinarsi come soluzioni del sistema di equazioni

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^{(m)} \int_{FD} \psi_l\, \omega_k\, ds = \int_{FD} b\omega_l\, ds \qquad l = 1,\, 2, \ldots m \tag{5}$$

allora si ha $\lim\limits_{m\to\infty} u_k = u$ dove u indica la soluzione del problema.

4. Per illustrare con un esempio numerico la efficacia del metodo lo abbiamo applicato nel seguente caso: D è un dominio circolare di raggio *dm* 1, Θ è assegnata come funzione lineare dell' anomalia φ al modo seguente

$$\Theta = \begin{matrix} 127{,}3239545\, \varphi & \text{per} & 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \\ -127{,}3239545\, \varphi & \text{»} & -\pi \leqq \varphi \leqq 0. \end{matrix}$$

Per il coefficiente di conducibilità termica assumiamo il valore uno. Per il coefficiente di irraggiamento valga la legge di dipendenza dalla temperatura indicato in (2).

1ª *Approssimazione.* Come valore medio di α assumiamo 17, cioè $a(Q, u_0) = 17$. Troviamo per la distribuzione di temperatura sul contorno $u_1(1, \varphi)$:

φ	0° ; 360°	30° ; 330°	60° ; 300°	90° ; 270°	120° ; 240°	150° ; 210°	180°
$r = 1$	19,5	73	136	200	264	327	380,5

2ª *Approssimazione.* Introducendo $u_1(1, \varphi)$ nella (2) otteniamo $a(Q, u_1) = 7{,}90881 \pm 3{,}24335\,\varphi + 1{,}076465\,\varphi^2$ e con questo $a(Q, u_1)$ calcoliamo le temperature al contorno $u_2(1, \varphi)$:

φ	0° ; 360°	30° ; 330°	60° ; 300°	90° ; 270°	120° ; 240°	150° ; 210°	180°
$r = 1$	29	75	136	200	265	330	389

3ª *Approssimazione.* Procedendo come sopra otteniamo $a(Q, u_2) = 8{,}19286 \pm 2{,}71609\,\varphi + 1{,}28446\,\varphi^2$ e la distribuzione di temperature $u_3(1, \varphi)$:

φ	0° ; 360°	30° ; 330°	60° ; 300°	90° ; 270°	120° ; 240°	150° ; 210°	180°
$r = 1$	33	77	137	200	264,5	329	387

4ª *Approssimazione.*
$a(Q, u_3) = 8{,}29452 \pm 2{,}67858\,\varphi + 1{,}26926\,\varphi^2$ e $u_4(1, \varphi)$:

φ	0° ; 360°	30° ; 330°	60° ; 300°	90° ; 270°	120° ; 240°	150° ; 210°	180°
$r = 1$	33	77	137	200	264,5	329	387

Questa approssimazione a meno di 0,5°C non si distingue più dalla terza approssimazione. A questo punto ci si può arrestare. Raccogliamo in una unica tabella i valori ottenuti per il confronto:

φ	0° ; 360°	30° ; 330°	60° ; 300°	90° ; 270°	120° ; 240°	150° ; 210°	180°
u_1	19,5	73	136	200	264	327	380,5
u_2	29	75	136	200	265	330	389
u_3	33	77	137	200	264,5	329	387
u_4	33	77	137	200	264,5	329	387

Indichiamo infine i valori locali delle temperature in alcuni punti interni come si ottengono dalla espressione della u nella 4. Approssimazione:

r \ φ	0° ; 360°	30° ; 330°	60° ; 300°	90° ; 270°	120° ; 240°	150° ; 210°	180°
0,0	203	203	203	203	203	203	203
0,2	172,5	176,5	187,5	202,5	217,5	229	233
0,4	142	151	173	202	232	255,5	265
0,6	110	125	159,5	201,5	244,5	281,5	298,5
0,8	75	100	147,5	201	255,5	306,5	336,5
1	33	77	137	200	264,5	329	387

Sintesi nel campo delle sostanze steroidi

Nota II. Sintesi del 2-metil-2-carbetossi-5-metossicicloesanone.

Nota del socio corrisp. **Luigi Panizzi** *e del dott.* **Stefano Corsano**

(Adunanza del dì 7 giugno 1952)

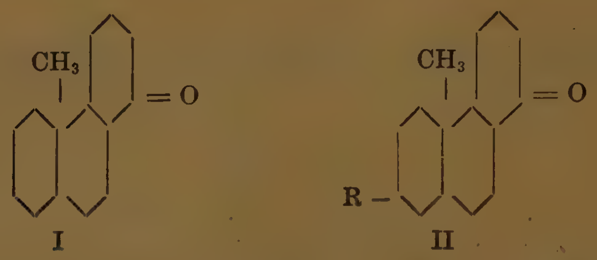
Sunto. — Insieme ad alcuni prodotti che si riallacciano alla Nota precedente, viene descritto l'ottenimento, a partire dall'estere α-acetilglutarico, del 2-metil-2-carbetossi-5-metossicicloesanone, intermedio per una sintesi di sostanze steroidi.

E' stato recentemente comunicato, da uno di noi [1]), la sintesi del 13-metil-1-chetoperidrofenantrene (I), realizzata attraverso una serie di reazioni che avevano lo scopo di servire da modelli per il successivo ottenimento dell'analogo (II), contenente, in posizione steroidica, un adatto

---

[1]) L. Panizzi e M. Piattelli, questi Rendiconti, (IV), *18*, 29 (1951).

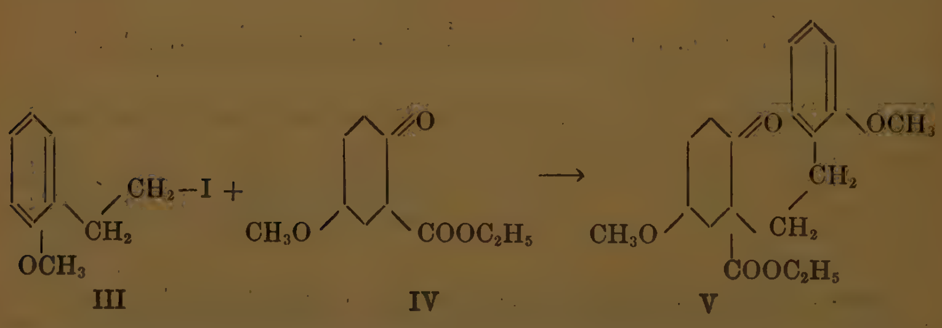
sostituente e particolarmente indicato per essere trasformato in sostanze steroidi mediante la successiva introduzione dell' anello ciclopentanico.



Durante il corso della nostra sintesi di (II), (R= $-OCH_3$) è peró apparsa una Nota di alcuni ricercatori americani [2]), in cui viene descritto l' ottenimento di (II), indipendentemente da noi, ma seguendo la stessa via da noi battuta.

Abbiamo pertanto dovuto interrompere la ricerca iniziata; siccome però alcuni intermedi furono da noi ottenuti sotto condizioni alquanto diverse da quelle dei suddetti AA., riteniamo utile comunicare i risultati da noi avuti.

Per azione del joduro di o. anisiletile (III) sull' estere dell' acido 4-metossi-2-cicloesanoncarbonico (IV), in presenza di etilato sodico e dopo molte ore di ebollizione in ambiente di alcool etilico anidro, si ottiene il 4-metossi-2-carbetossi-2-(β-anisiletil) cicloesanone (V) con un rendimento di circa



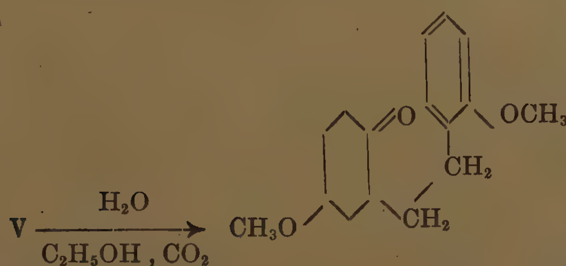
il 50%, sotto forma di un liquido p. eb. 124-125° a 6 mm. (All' analisi trov. % C 67,87; H 7,91. Per $C_{19}H_{26}O_5$ calc. %; C 68,24; H 7,84). Il dinitro fenilidrazone di (V) cristallizza dall' acido acetico in aghi gialli, p. f. 148,5-150,5°, (All' analisi: trov. %: N 10,97; per $C_{25}H_{30}O_8N_4$ calc. %: N 10, 89).

Una ebollizione di (V) con una miscela di acido solforico, acido acetico ed acqua, conduce con una resa del 57%, per saponificazione e decarbos-

---

[2]) W. B. Renfrow, A. Renfrow, E. Shoun e C. A. Sears, J. Am. Chem. Soc., *73*, 317 (1951).

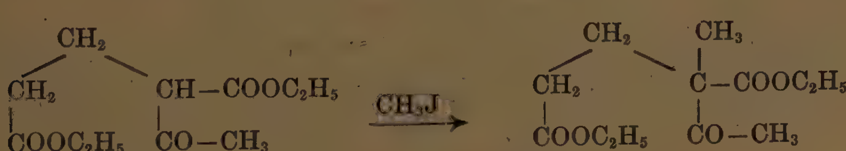
silazione, a (VI), liquido a p. eb. 200-205° sotto 6 mm., che si colora in violetto in soluzione alcoolica con cloruro ferrico. (All' analisi: trov. °/₀ C 72,9; H 9,00. Per $C_{16}H_{22}O_3$ calc. °/₀: C 73,25; H 8,45). Il dinitrofenil-idrazone di (VI) cristallizza dall' acido acetico in aghi gialli, p. f. 132-134°. (All' analisi: trov. °/₀: N 12,76; per $C_{22}H_{26}O_6N_4$ calc. °/₀: N 12,66)[3].



VI

Attualmente abbiamo in corso un' altra ricerca, rivolta sempre ad ottenere il chetone peridrofenantrenico (II), ($R = -OCH_3$), ma attraverso una serie di reazioni progettate per la costruzione graduale, nell' ordine, degli anelli A, B e C, contenenti ciascuno i sostituenti adatti alle successive trasformazioni [4]). Riservandoci di comunicare in seguito gli ulteriori porgressi della ricerca riferiamo in questa Nota sulla sintesi del cicloesanone sostituito (XII).

Per azione del joduro di metile sull' estere α acetilglutarico (VII) — ottenibile per azione del β-cloropropionato di etile o meglio dell' acrilato di etile sull' estere sodioacetacetico — in ambiente alcoolico anidro all' ebollizione e in presenza di etilato sodico, si ottiene, con rese del 70°/₀ circa, l' α-acetil-α-metilglutarato di etile (VIII), p. eb. 154-156 a 15 mm. (All' analisi: trov. °/₀: C 58,56; H 8,46. Per $C_{12}H_{20}O_5$ calc. °/₀ C 59,0; H 8,25).



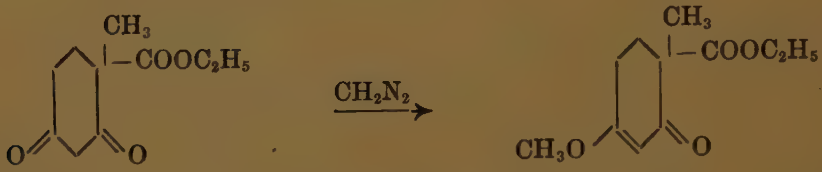
VII VIII

---

[3]) Nei passaggi suddetti, gli AA. citati hanno impiegato, invece di (III), il bromuro corrispondente, eseguendo la condensazione in ambiente di alcool butilico terziario e in presenza di butossido terziario di potassio. Il successivo ottenimento di (VI) da (V), fu da essi realizzato attraverso metanolisi ad estere pimelico, riciclizzazione e scissione alcalina del chetoestere. Le proprietà dei composti ottenuti (V) e (VI), corrispondono in entrambi i casi; gli AA. suddetti non ne hanno però descritto i derivati idrazonici.

[4]) La regolare costruzione, nell' ordine riferito, dei vari anelli del sistema peridrofenantrenico, potrà rendere meno disagevole lo studio dei complicati rapporti sterici che si stabiliscono nel decorso della sintesi.

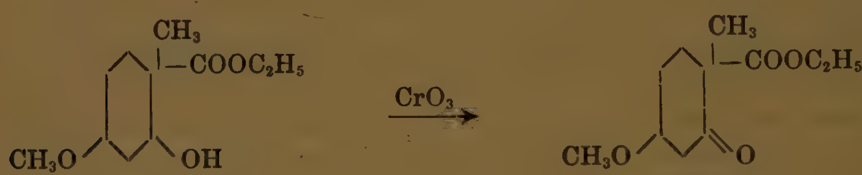
Sotto l' azione dell' etilato sodico a freddo, in ambiente alcoolico anidro, (VIII) subisce una condensazione intramecolare, fornendo il 4-metil-4-carbetossi-1,3-cicloesandione (IX); questo, mediante diazometano, viene trasformato nell' etere metilico (X) della sua forma enolica, [5]) liquido p. eb. 124-126° sotto 1 mm. (All' analisi trov. %: C 61,63; H 7,86. Per $C_{11}H_{16}O_4$



IX X

calc. %: C 62,25; H 7,6). Il rendimento complessivo nel passaggio da (VIII) a (X), si aggira sul 40%.

La riduzione di (X), eseguita con idrogeno, in presenza di Ni-Raney, a temperatura e pressione ambiente, conduce quasi quantitativamente alla formazione del 2-metil-2-carbetossi-5-metossicicloesanolo (XI), liquido incolore p. eb. 111-114° sotto 1,2 mm. (All' analisi: trov. %: C 60,40; H 9,46. Per $C_{11}H_{20}O_4$ calc. %: C 61,09; H 9,32).



XI XII

L' ossidazione cromica (anidride cromica, in ambiente acetico a freddo), trasforma (XI) nel 2-metil-2-carbetossi-5-metossicicloesanone (XII), liquido a p. eb. 106-108° sotto 0,5 mm. (All' analisi: trov. % C 61,80; H 8,77. Per $C_{11}H_{19}O_4$ calc. %: C 61,66; H 8,47).

Napoli, Istituto di Chimica organica della Università, 7 giugno 1952.

---

[5]) Per la posizione dell' ossidrile enolico nei derivati degli 1,3 cicloesandioni, cfr. D. Vorlaender, Ann., *294*, 253 (1897).

Sulla derivazione delle funzioni composte

Nota del dott. **Alberto Sambo**, *presentata dal socio corr.* **G. Scorza Dragoni**

(Adunanza del dì 7 giugno 1952)

Sunto. — L' autore indica condizioni sufficienti per l' esistenza della derivata asintotica per funzioni composte del tipo $f(x, \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x))$.

In una recente Nota [1]) il prof. G. Scorza Dragoni ha dimostrato, fra l' altro, il seguente teorema:

La funzione $z(x, y)$ sia misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y nell' insieme

$$B: a \leq x \leq b \quad , \quad c \leq y \leq d;$$

la funzione $\rho(x)$ sia continua in

$$I: a \leq x \leq b,$$

vi soddisfaccia nell' interno alla $c < \rho(x) < d$, e vi sia quasi ovunque derivabile (con derivata finita). E per quasi tutti gli x di I la funzione $z(x, y)$ ammetta derivate parziali (finite) nei punti della curva $y = \rho(x)$. Allora, posto $Z(x) = z(x, \rho(x))$, in quasi tutti i punti di I $Z(x)$ ammette derivata asintotica e questa è data dalla espressione

$$z'_x(x, \rho(x)) + z'_y(x, \rho(x)) \cdot \rho'(x).$$

Ebbene, in questa Nota mi propongo di far vedere come si possa estendere il precedente risultato per funzioni di $n \geq 3$ variabili [2]).

Precisamente dimostro il teorema:

Nel dominio rettangolare R dello spazio ad $n+1$ dimensioni

$$R: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ a_1 \leq y_1 \leq b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_n \leq y_n \leq b_n \end{cases}$$

[1]) G. Scorza Dragoni, *Un' osservazione sulla derivata di una funzione composta*. Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, Vol. XX, (1951), pagg. 462-467 n. 2.

[2]) Una estensione per funzioni composte del tipo $f(x(t), y(t))$ è stata data da A. Scorza Toso. *Sulla derivazione di una funzione composta*, in corso di stampa. Rend. Semin. Matem. Univ. Padova.

sia data una funzione $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ *misurabile rispetto ad* x *e continua rispetto ad* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. *Inoltre nell' intervallo*

$$I:\ a \leq x \leq b$$

siano date n *funzioni continue e quasi dappertutto derivabili* $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ *soddisfacenti alle limitazioni*

$$a_i < \alpha_i(x) < b_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Per quasi tutti gli x *di* I *la funzione* $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ *ammetta derivata parziale rispetto ad* x *nei punti* $(x, \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x))$ *e sia differenziabile rispetto ad* $(y_1, \ldots, y_n)$ *nei punti* $(x, \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x))$.

Allora, sotto queste ipotesi, la funzione composta

$$F(x) = f(x, \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x))$$

è asintoticamente derivabile in quasi tutto I *con derivata asintotica uguale a*

$$f'_x(x, \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)) + \sum_1^n{}_i\, f'_{y_i}(x, \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)) \cdot \alpha'_i(x).$$

Scegliamo il numero positivo k in modo che i punti $(x, y_1, \ldots, y_n)$ soddisfacenti alle condizioni

$$\begin{gathered} a \leq x \leq b \\ -k \leq y_1 - \alpha_1(x) \leq k \\ \cdots\cdots\cdots \\ -k \leq y_n - \alpha_n(x) \leq k \end{gathered}$$

stiano in R.

Indichiamo con R^* e con R_i^* $(i = 1, \ldots, n)$ i domini rettangolari

$$R^*: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ -k \leq h_1 \leq k \\ \cdots\cdots \\ -k \leq h_n \leq k \end{cases}, \qquad R_i^*: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ -k \leq h_i \leq k \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

In R^*_i definiamo la funzione $\gamma_i(x, h_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ ponendo

$$\gamma_i(x, h_i) = 0$$

se in $(x, \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x))$ non esiste la f'_{y_i} e, nel caso contrario,

$$\gamma_i(x, h_i) = f'_{y_i}(x, \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)) \qquad \text{per } h_i = 0$$

e

$$\gamma_i(x, h_i) = \frac{f(x, \alpha_1(x), \ldots, \alpha_i(x)+h_i, \ldots, \alpha_n(x))}{h_i} -$$

$$- \frac{f(x, \alpha_1(x), \ldots, \alpha_i(x), \ldots, \alpha_n(x))}{h_i} \qquad \text{per } h_i \neq 0.$$

Per le ipotesi fatte su $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ la $\gamma_i(x, h_i)$ è in R_i^* continua rispetto ad h_i e misurabile rispetto ad x.

Poi in R^* definiamo la funzione $\sigma(x, h_1, \ldots, h_n)$ nel modo seguente

$$\sigma(x, h_1, \ldots h_n) = 0$$

se in $(x, \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x))$ la $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ non è differenziabile rispetto ad $(y_1, \ldots, y_n)$ e, nel caso contrario,

$$\sigma(x, h_1, \ldots, h_n) = 0 \qquad \text{per } h_1 = \ldots = h_n = 0,$$

e

$$\sigma(x, h_1, \ldots, h_n) = \frac{f(x, \alpha_1(x)+h_1, \ldots, \alpha_n(x)+h_n) - f(x, \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x))}{\left(\sum_1^n{}_i\, h_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} -$$

$$- \frac{\sum_1^n{}_i\, h_i\, f'_{y_i}(x, \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x))}{\left(\sum_1^n{}_i\, h_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{per } \sum_1^n{}_i\, h_i^2 \neq 0.$$

Questa funzione $\sigma(x, h_1, \ldots, h_n)$ sisulta in R^* misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad $(h_1, \ldots, h_n)$.

Per un teorema dello Scorza Dragoni [1]) possiamo affermare che esiste nell' intervallo I un insieme chiuso C di misura prossima a $(b-a)$ quanto si vuole, tale che in esso le $\alpha_i(x)$ $(i=1, \ldots, n)$ ammettano derivate finite, la funzione $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ ammetta derivate parziali prime finite in $(x, \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x))$, e tale ancora che le funzioni $\gamma_i(x, h_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ e $\sigma(x, h_1, \ldots, h_n)$ siano uniformemente continue se pensate come definite nelle porzioni di R^*_i $(i=1, \ldots, n)$ e R^* costituite dai punti con la prima coordinata contenuta in C.

Ebbene, in C si scelga un punto x_0 di densità lineare 1 per C (in ultima analisi ad x_0 sono concesse quasi tutte le posizioni in I).

---

[1]) G. Scorza Dragoni, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un' altra variabile,* Rend. Semin. Matem. Univ. Padova, Vol. XVII (1948), pagg. 102-106.

G. Stampacchia, *Sopra una classe di funzioni in n variabili,* « Ricerche di Matematica », Vol. I (1952), pagg. 27-54, pag. 30.

Se $x_0+\Delta x$ appartiene a C, e Δx è tale da aversi

$$|\Delta\alpha_i|\leq k$$

se

$$\Delta\alpha_i=\alpha_i(x_0+\Delta x)-\alpha_i(x_0)\qquad(i=1,\ldots,n),$$

riesce

$$\begin{aligned}
&F(x_0+\Delta x)-F(x_0)=\\
&=f(x_0+\Delta x,\alpha_1(x_0)+\Delta\alpha_1,\ldots,\alpha_n(x_0)+\Delta\alpha_n)-f(x_0,\alpha_1(x_0),\ldots,\alpha_n(x_0))=\\
&=f(x_0+\Delta x,\alpha_1(x_0)+\Delta\alpha_1,\ldots,\alpha_n(x_0)+\Delta\alpha_n)-f(x_0+\Delta x,\alpha_1(x_0),\ldots,\alpha_n(x_0))+\\
&+f(x_0+\Delta x,\alpha_1(x_0),\ldots,\alpha_n(x_0))-f(x_0,\alpha_1(x_0),\ldots,\alpha_n(x_0))=\\
&=f'_{y1}(x_0+\Delta x,\alpha_1(x_0)+\Delta\alpha_1,\ldots,\alpha_n(x_0)+\Delta\alpha_n)\cdot\Delta\alpha_1+\ldots\ldots+\\
&+f'_{yn}(x_0+\Delta x,\alpha_1(x_0)+\Delta\alpha_1,\ldots,\alpha_n(x_0)+\Delta\alpha_n)\cdot\Delta\alpha_n-\\
&-\sigma(x_0+\Delta x,-\Delta\alpha_1,\ldots,-\Delta\alpha_n)\cdot(\Delta^2\alpha_1+\ldots+\Delta^2\alpha_n)^{\frac{1}{2}}+\\
&+f'_x(x_0,x_1(x_0),\ldots,\alpha_n(x_0))+\varepsilon\Delta x
\end{aligned}$$

con $\varepsilon\to 0$ per $\Delta x\to 0$; per le proprietà delle funzioni $\gamma_i(x,h_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ si ha quindi

$$\begin{aligned}
&F(x_0+\Delta x)-F(x_0)=\\
&=f'_x(x_0,\alpha_1(x_0),\ldots,\alpha_n(x_0))+\sum_1^n{}_i\, f'_{yi}(x_0,\alpha_1(x_0),\ldots,\alpha_n(x_0))\cdot\Delta\alpha_i+\\
&+\varepsilon\Delta x+\sum_1^n{}_i\,\varepsilon_i\Delta\alpha_i-\sigma(x_0+\Delta x,-\Delta\alpha_1,\ldots,-\Delta\alpha_n)\cdot(\Delta^2\alpha_1+\ldots+\Delta^2\alpha_n)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

con le ε_i infinitesime per $\Delta x\to 0$ e mantenendosi $x_0+\Delta x$ in C. Epperò dividendo per Δx e passando al limite per $\Delta x\to 0$, in modo però che $x_0+\Delta x$ si mantenga sempre in C si ottiene immediatamente la conclusione desiderata.

Sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico nei domini non limitati [1])

Nota del dott. **Bruno Pini**, *presentata dal socio corr.* **G. Cimmino**

(Adunanza del dì 7 giugno 1952)

Sunto. — Per un dominio piano illimitato con frontiera tutta al finito e per un dominio piano illimitato che generalizza la striscia, si tratta un problema generalizzato di Dirichlet per l'equazione $\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$; si impone alla soluzione di assumere in media, anzichè puntualmente, i valori assegnati sul contorno, e di soddisfare una condizione all'infinito di tipo integrale.

Appoggiandosi a certi risultati di M. Picone [2]), L. Amerio ha stabilito un teorema generale di esistenza per il problema di Dirichlet relativo all'equazione ellittica lineare del secondo ordine in domini non limitati [3])

La soluzione è conseguita come limite delle soluzioni per il problema di Dirichlet relativo ai domini staccati dal dato da una successione di domini sferici col centro fisso e raggi le cui lunghezze costituiscono una successione divergente; la condizione all'infinito consiste nell'essere infinitesimo all'infinito il rapporto fra tale soluzione e una certa funzione positiva divergente con la distanza del punto dall'origine. Un teorema analogo è stato successivamente stabilito da M. Krzyżański [4]). Per equazioni ellittiche di tipo particolare e per domini particolari (striscia, strato, . . .) sono stati fatti numerosi studi seguendo il *metodo delle trasformate* [5]) e, nei più re-

---

[1]) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

[2]) M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore* Napoli, 1940, pp. 695-696 e 701-704.

[3]) L. Amerio, *Teoremi di esistenza per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico nei domini illimitati.* Rend. Acc. d'Italia, s. VII, vol. IV (1943) pp. 287-298.

[4]) M. Krzyżański, *Sur le problème de Dirichlet pour l'équation linéaire du type elliptique dans un domaine non borné,* Rend. Acc. Naz. Lincei, s. VIII, vol. IV (1948), pp. 408-416.

[5]) P. es.: A. Ghizzetti, *Sui problemi di Dirichlet per la striscia e per lo strato.* Memorie Acc. d'Italia, vol. XIII (1942), pp. 617-649; D. Caligo, *Sul problema di Dirichlet per l'iperstrato.* Atti Acc. Naz Lincei, s. VIII, vol. I (1946), pagg. 534-539; C. Birindelli, *Nuova trattazione di problemi al contorno di una striscia per l'equazione di Laplace in due variabili.* Annali di Mat. pura e applicata, s. IV, t. XXV (1946), pp. 155-195. e *Nuova trattazione di problemi al contorno di uno strato per l'equazione di Poisson in tre variabili.* Rivista di Mat. dell'Università di Parma, vol. 2 (1951), pp. 77-102, 235-263 e 337-364.

centi, sul comportamento all' infinito della soluzione si fanno ipotesi poco restrittive. Queste sono però sempre di tipo puntuale uniforme. Nelle righe che seguono tratteremo il problema ordinario di DIRICHLET deducendolo da un problema generalizzato del tipo considerato da G. CIMMINO [1]) dimodochè sarà conseguita una certa economia sulle condizioni all' infinito che riusciranno di tipo globale anzichè puntuale. Noi ci limiteremo a una equazione in due variabili che, senza perdita di generalità, supporremo nella forma canonica

$$(1)\qquad L[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)\,u=f(x,y)\,,$$

con a e b dotate delle derivate parziali prime continue, c ed f continue, e separeremo il caso del dominio con frontiera tutta al finito da quello di un dominio con frontiera non tutta al finito.

Caso di dominîo non limitato con frontiera tutta al finito.

Supponiamo che il dominio D abbia per punti frontiera quelli di una curva regolare semplice chiusa C, dotata di tangente e curvatura continue, di cui $x=\overline{x}(s)\,,\,y=\overline{y}(s)$ sia una rappresentazione parametrica regolare riferita all' arco s , $0\leq s\leq L$. Sia $C(t)\equiv(x=\overline{x}(s)+t\overline{y}'(s)\;\;,\;y=\overline{y}(s)-t\overline{x}'(s))$ una famiglia di curve parallele a C, per t in un intorno positivo dello zero.

Consideriamo il seguente problema generalizzato: data una funzione $\overline{u}\,.(s)$ di quadrato sommabile su $0\leq s\leq L$, e una funzione positiva e continua $\Pi(x,y)$, determinare una funzione $u(x,y)$ continua con le derivate prime e seconde in D-FD tale che

$$(2)\qquad \begin{gathered} L[u]=f \qquad in\ D-FD \\ \lim_{t\to 0}\int_0^L [\Pi(u-\overline{u})^2]_{C(t)}\,ds=0\,, \end{gathered}$$

sotto una certa condizione all' infinito che specificheremo più avanti.

---

[1]) G. CIMMINO, *Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet.* Rend. Circolo Mat. di Palermo, t. LXI (1937), pp. 177-221; *Sul problema generalizzato di Dirichlet per l' equazione di Poisson.* Rend. seminario Mat. di Padova (1940), pp. 28-96; in quest' ultimo lavoro è brevemente trattato anche un caso particolare notevole di dominio non limitato, precisamente quello dei punti dello spazio per cui non è contemporaneamente $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$, $z=0$. La condizione all' infinito è però quella classica della convergenza.

Indichiamo con $D(t)$ il dominio che ha per contorno interno $C(t)$ e per contorno esterno la circonferenza, $\gamma(t)$, col centro nell' origine e raggio $^1/_t$. Se Π ed u sono funzioni dotate delle derivate prime e seconde continue in D-FD, si ha, qualunque sia t,

$$2\int_{FD(t)}\Pi u\left(\frac{\partial u}{\partial y}dx-\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)=\iint_{D(t)}(M[\Pi]+c\Pi)u^2dx\,dy-2\iint_{D(t)}\Pi\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+$$
$$(3)\qquad +\int_{FD(t)}\left|\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}-\Pi b\right)u^2dx-\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}-\Pi a\right)u^2dy\right|-2\iint_{D(t)}\Pi uL[u]dxdy$$

avendo indicato con M l' operatore aggiunto di L. Servendosi della (3) si può provare che

$$(4)\ \frac{d}{dt}\left[\int_0^L(\Pi u^2)_{C(t)}\frac{\partial s(t)}{\partial s}ds+t\int_0^{2\pi}\left(\Pi u^2\right)_{\gamma(t)}d\theta\right]=\int_0^L\left[\left(\frac{\partial\Pi}{\partial t}\frac{\partial s(t)}{\partial s}+\Pi\frac{\partial^2 s(t)}{\partial s\partial t}\right)u^2\right]_{C(t)}ds+$$
$$\int_0^{2\pi}\left[\left(\Pi+t\frac{\partial\Pi}{\partial t}\right)u^2\right]_{\gamma(t)}d\theta+\iint_{D(t)}(M[\Pi]+c\Pi)u^2dxdy-2\iint_{D(t)}\Pi\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+$$
$$+\int_{FD(t)}\left|\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}-\Pi b\right)u^2dx-\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}-\Pi a\right)u^2\,dy\right|-2\iint_{D(t)}\Pi u\,L[u]dxdy,$$

essendo $s(t)$ l' arco di $C(t)$.

Da questa segue il teorema di unicità:

Se i coefficienti di L *sono limitati in* D, *se esiste una funzione* Π (x , y) *continua e positiva in* D, *dotata delle derivate prime e seconde continue in* D *e tale che* $\left|\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right|<\mu\,\Pi$, $\left|\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right|<\mu\,\Pi$, *per una certa costante positiva* μ, *e* $M[\Pi]+c\,\Pi\leq o$, *allora nell' insieme delle funzioni continue con le derivate prime e seconde in* D$-$FD *e tali che*

$$(5)\qquad \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^{2\pi}(\Pi u^2)_{\gamma(t)}d\theta\ \ 0$$

ve n' è al più una che risolve il problema generalizzato (2).

Infatti se u è una soluzione regolare di $L[u]=o$ in $D-FD$, non identicamente nulla e convergente in media a zero su FD, le ipotesi fatte assicurano che il secondo membro di (4) è negativo, per t abbastanza piccolo, onde la funzione sotto al segno di derivata nel primo membro di (4) è crescente per $t\to o$ e ciò è incompatibile con la convergenza in media a zero su FD di u.

Le ipotesi fatte sono evidentemente sovrabbondanti ma convenienti per ragioni di semplicità [1]. La condizione all'infinito (5) è, come dicevamo all'inizio, di tipo integrale a differenze di quelle puntuali degli *AA.* citati. Ed essa può restare invariata se, anzichè riferirci a un problema generalizzato, si tratta un problema ordinario. Infatti, fissato un cerchio Γ col centro nell'origine e raggio sufficientemente grande in modo che la FD sia tutta interna a Γ, supponiamo che il problema generalizzato abbia la soluzione $u(x, y)$, che $\overline{u}(s)$ sia continua e abbia soluzione il problema ordinario

$$L[v] = f \qquad \text{in } D\cdot\Gamma - F(D\cdot\Gamma)$$

$$v = \begin{cases} \overline{u} & \text{su } FD \\ u & \text{» } F\Gamma. \end{cases}$$

Poichè nel dominio $D\cdot\Gamma$ coincidono le soluzioni del problema ordinario e di quello generalizzato, la stessa u sarà soluzione del problema ordinario

$$L[u] = f \qquad \text{in } D - FD$$
$$u = \overline{u} \qquad \text{su } FD.$$

Passiamo ora a provare l'esistenza della soluzione. Adottando uno schema noto, sia Σ lo spazio delle coppie ($f\ (x, y)$, $\varphi\ (s)$) con f tale che $\Pi^{1-\varepsilon} f^2$ per un certo ε, $(0 \leq \varepsilon < 1)$, sia sommabile su D e φ^2 sia sommabile su $o \leq s \leq L$; Σ_L il sottospazio di Σ delle coppie ($L[u]$, $(u)_C$) con u continua insieme alle derivate prime e seconde; Σ' lo spazio, duale di Σ, delle coppie ($F(x, y)$, $\Phi(s)$) con $\Pi^{\varepsilon-1} F^2$ sommabile su D e Φ^2 sommabile su $0 \leq s \leq L$.

Se Π, *oltre a soddisfare le ipotesi già fatte, è infinitesima all'infinito e soddisfa la condizione* $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^{2\pi} (\Pi)_{\gamma(t)}\, d\theta = 0$, *e sussiste il teorema di unicità anche per il problema aggiunto di quello considerato, allora se riesce*

$$\iint_D F L[u]\, dx\, dy + \int_0^L (u)_C \Phi\, ds = 0 \tag{6}$$

per una coppia (F, Φ) *di* Σ' *e qualunque sia* u *in* Σ_L, *risulta* $(F, \Phi) = 0$.

---

[1]) P. es. se $M[v] + cv = \Delta v + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma v$, se $\gamma \leq -m^2$, $|\alpha| \leq \mu$, $|\beta| \leq \mu$, si può prendere $\Pi = \exp. [-(\sqrt{m^2 + \mu^2} - \mu) \sqrt{x^2 + y^2}]$.

Per brevità ci riferiremo a una nota precedente [1]). Faremo sui coefficienti e sulla funzione f le stesse ipotesi di regolarità colà indicate che, sebbene sovrabbondanti, permettono di esimerci dall' invertire la proprietà di media caratteristica per le soluzioni di $L[u]=f$. Come sola differenza, supporremo le anzidette funzioni prolungate in una corona $x=\overline{x}(s)-t\overline{y}'(s)$, $y=\overline{y}(s)+t\overline{x}'(s)$, $0\leq t\leq d$, e, nella definizione di $U^*(P,Q)$, intenderemo di sostituire al campo A il cerchio di centro Q e raggio d. Con gli stessi ragionamenti usati nel lavoro citato si riconosce che F differisce al più nei punti di un insieme di misura nulla da una soluzione regolare di $M[F]=0$.

Indichiamo poi con Q un punto a piacere di FD, con Ω il cerchio che ha il centro Q e raggio fisso r $(<d)$. Siano Q_+ e Q_- due punti opposti rispetto a Q sulla normale in Q a FD e a distanza t da questa $(t<r)$, dei quali Q_+ interno a D e Q_- esterno. Si ha:

$$F(Q_+)=-\frac{1}{4\pi}\left(\iint\limits_{\Omega\cdot D}F(P)L[V(P,Q_+)-V(P,Q_-)]\,dP+\int_{s_1(Q)}^{s_2(Q)}\Phi(s)[V(P,Q_+)-V(P,Q_-)]_C\,ds\right)$$

ove $V(P,Q_\pm)=U^*(P,Q)\left(1-\frac{\overline{PQ}^5}{\rho_\pm^5}\right)^3$ essendo U^* la funzione precedentemente detta ed indicando con $\rho_\pm$ la distanza di $Q\pm$ dal punto intersezione di $F\Omega$ con la semiretta $Q\pm P$; $s_1(Q)$ ed $s_2(Q)$ le ascisse curvilinee delle intersezioni di $F\Omega$ con FD. Segue

$$\lim_{t\to 0}\int_0^L(\Pi F^2)_{C(t)}\,ds=0.$$

Consideriamo ora la circonferenza $\gamma(t)$; a ogni suo punto Q associamo il cerchio Ω così come prima.

Dalla condizione di ortogonalità (6) segue

$$F(Q)=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Omega}F(P)L[V(P,Q)]\,dP$$

e poichè

$$F^2(Q)\leq\frac{1}{16\pi^2}\iint\limits_{\Omega}\Pi^{\varepsilon-1}F^2dP\iint\limits_{\Omega}\Pi^{1-\varepsilon}L^2[V(P,Q)]dP,$$

---

[1]) B. Pini, *Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico*. Rend. Acc. Naz. Lincei, s. VIII, vol. XI (1951) pp. 325-333.

si ha

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t_\epsilon}\int_0^{2\pi}(\Pi F^2)_{\gamma(t)}\,d\theta=0$$

e quindi resta assicurata la condizione all' infinito sotto la quale, in base al teorema di unicità, si può concludere che $F=0$. Segue che $\Phi=0$ e il teorema di completezza risulta provato.

Pertanto, fissata una coppia (f,φ) di Σ, esisterà una successione $\{u_n\}$, di funzioni di Σ', tale che

$$\text{(7)}\qquad \lim_{n\to\infty}\iint_D \Pi^{1-\epsilon}(f-L[u_n])^2dx\,dy=0\quad,\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^L(\varphi-u_n)^2{}_C\,ds=0.$$

Ebbene:

Nelle ipotesi già specificate su Π *se, di più, per un certo* $\varepsilon>0$ *e* <1 *è* $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^{2\pi}(\Pi^\epsilon)_{\gamma(t)}d\theta=0$ [1]), *allora la successione* $\{u_n\}$, *o una subordinata, converge a una funzione* u *che in* D—FD *è soluzione regolare di* L [u] = f, *e converge in media su* FD *a* φ (s), *avendo il comportamento all' infinito indicato precedentemente.*

Supponiamo, momentaneamente, che esitano due costanti positive p ed H con $2<p<3$, tali che riesca

$$\text{(8)}\qquad \iint_D \Pi^{\frac{p(1-\epsilon)}{2}}|u_n|^p\,dx\,dy<H$$

qualunque sia n.

Dalla formola di media

$$\text{(9)}\qquad u_n=\frac{1}{4\pi}\iint_\Omega(VL[u_n]-u_nM[V])dx\,dy$$

segue intanto che in ogni dominio limitato interno a D la successione

---

[1]) Le ulteriori condizioni imposte alla funzione Π sono evidentemente sod disfatte nel caso considerato alla nota [1]) di pag. 4 con una $\varepsilon>0$ arbitrariamente piccola.

$\{u_n\}$, o una sua subordinata, converge uniformemente a una funzione (continua) u la quale è poi soluzione di $L[u]=f$, come si riconosce con un passaggio al limite e tenendo presente la proprietà di media caratteristica delle soluzioni $L[u]=f$. Posto

$$u_{\mu\nu}=u_\mu-u_\nu \quad , \quad \omega_{\mu\nu}(t)=\int_0^L (\Pi u^2_{\mu\nu})_{C(t)} \frac{\partial s(t)}{\partial s} ds.$$

dall'identità (4), ove si ponga $u_{\mu\nu}$ al posto di u, e si integri tra t_0 e t $(t_0<t)$, sopprimendo al secondo membro quantità negative e tenendo presenti le maggiorazioni ammesse per le $\left|\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right|$ e $\left|\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right|$, si ha

$$\text{(10)} \quad \omega_{\mu\nu}(t)<\omega_{\mu\nu}(t_0)+M_1\int_{t_0}^t \omega_{\mu\nu}(\tau)d\tau+t_0\int_0^{2\pi}(\Pi u^2_{\mu\nu})_{\gamma(t_0)}d\theta+M_2\int_{t_0}^t\frac{d\tau}{\tau}\int_0^{2\pi}(\Pi u^2_{\mu\nu})_{\gamma(\tau)}d\theta-$$
$$-2\int^t d\tau\iint_{D(\tau)}\Pi u_{\mu\nu}L[u_{\mu\nu}]\,dx\,dy$$

dove M_1 ed M_2 sono due certi costanti (positive) indipendenti da t. Tenendo presente la formula di media (9), si ha

$$\text{(11)} \quad \int_0^{2\pi}(\Pi u^2_{\mu\nu})_{\gamma(t)}d\theta<\int_0^{2\pi}\Big\{\Pi\Big[\iint_\Omega \Pi^{1-\varepsilon}L^2[u_{\mu\nu}]dxdy\iint_\Omega \Pi^{\varepsilon-1}V^2dxdy+$$
$$+\left(\iint_\Omega \Pi^{\frac{p(1-\varepsilon)}{2}}|u_{\mu\nu}|^p dxdy\right)^{\frac{2}{p}}\cdot\left(\iint_\Omega \Pi^{-\frac{p(1-\varepsilon)}{2(p-1)}}|M[V]|^{\frac{p}{p-1}}dxdy\right)^{\frac{2(p-1)}{p}}\Big]\Big\}_{\gamma(t)}d\theta$$

Si noti che nell'applicare la diseguaglianza di Hölder all' $\iint_\Omega u_{\mu\nu}\,M[V]\,dx\,dy$ bisogna tener presente che mentre $L[V]$ è una funzione priva di singolarità, la $M[V(P,Q)]$ per $P\to Q$ si comporta come $\frac{1}{\overline{PQ}}$. Ora poichè $\left|\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right|\leq\mu\,\Pi$, $\left|\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right|\leq\mu\,\Pi$, comunque si fissi il punto Q, per ogni P dell'intorno Ω di Q di raggio r (abbastanza piccolo) riesce

$$\text{(12)} \qquad \frac{1-2\mu r}{1-\mu r}\Pi(Q)\leq\Pi(P)\leq\frac{1}{1-\mu r}\Pi(Q)$$

onde il secondo membro di (11) è infinitesimo per $t \to 0$. Se poi indichiamo con $\Gamma(t)$ il cerchio di frontiera $\gamma(t)$, si ha

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\tau_{\cdot}} \int_0^{2\pi} (\Pi u^2_{\mu\nu})_{\gamma(\tau)} d\theta < t^2 \iint\limits_{\Gamma(t_0)-\Gamma(t)} \Pi u^2_{\mu\nu} dxdy < t^2 \Big(\iint\limits_{D} \Pi^{\frac{p(1-\varepsilon)}{2}} |u_{\mu\nu}|^p dxdy \Big)^{\frac{2}{p}}$$

$$\cdot \Big(\iint\limits_{\Gamma(t_0)-\Gamma(t)} \Pi^{\frac{p\varepsilon}{p-2}} dxdy \Big)^{\frac{p-2}{p}}$$

si ha anche

$$\Big| \iint\limits_{D(t)} \Pi u_{\mu\nu} L[u_{\mu\nu}] dxdy \Big| < \Big(\iint\limits_{D} \Pi^{1-\varepsilon} L^2[u_{\mu\nu}] dxdy \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\iint\limits_{D} \Pi^{\frac{p(1-\varepsilon)}{2}} |u_{\mu\nu}|^p dxdy \Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Big(\iint\limits_{D(t)} \Pi^{\frac{2\varepsilon p}{p-2}} dxdy \Big)^{\frac{p-2}{2p}}$$

D' altra parte se T è tale che $\Gamma(T) \supset FD$ e $t < T$,

$$\iint\limits_{\Gamma(t)-\Gamma(T)} \Pi^{\frac{\varepsilon p}{p-2}} dxdy = \int_t^T \frac{d\tau}{\tau^3} \int_0^{2\pi} \Big(\Pi^{\frac{\varepsilon p}{p-2}} \Big)_{\gamma(\tau)} d\theta < \text{cost.} \int_t^T \Big(\tau^{\frac{3(2-p)}{p}} \int_0^{2\pi} (\Pi^{\varepsilon})_{\gamma(\tau)} d\theta \Big)^{\frac{p}{p-2}} d\tau$$

e poichè $3(p-2) < p$, l' integrando in τ dell' ultimo integrale scritto converge a zero per $\tau \to 0$; si può concludere, passando al limite per $t_0 \to 0$ nella (10), che

$$\omega_{\mu\nu}(t) < \overline{\omega} + M_1 \int_0^t \omega_{\mu\nu}(\tau) d\tau$$

essendo $\overline{\omega}$ infinitesimo per $\mu, \nu \to \infty$, $t \to 0$. Di qui si deduce [1]) che la funzione u, limite di $\{u_n\}$, converge in media a φ su FD nel senso specificato.

Resta poi assicurato per u il comportamento all' infinito indicato, come si deduce dalla formola di media (9) (con u al posto di u_n ed f al posto di $L[u_n]$) con lo stesso ragionamento di prima.

[1]) cfr. G. Cimnino, L. c. in (5).

Infine la legittimità dell' ipotesi (8) segue dall' osservare che se essa non fosse soddisfatta, detta $\{u_n^*\}$ una sottosuccessione di $\{u_n\}$ per cui $\lim_{n\to\infty}\iint_D \Pi^{\frac{p(1-\varepsilon)}{2}} |u_n^*|^p\, dx\, dy = +\infty$, e posto

$$v_n = u_n^* \Big/ \left(\iint_D \Pi^{\frac{p(1-\varepsilon)}{2}} |u_n^*|^p\, dxdy\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ si avrebbe} \lim_{n\to\infty}\iint_D \Pi^{1}\, L^2[v_n]\, dxdy = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int^L \left(v_n^2\right)_{C(t)} ds = 0,$$

che, unite alla solita condizione all' infinito, assicurano che la funzione limite è nulla, il che contraddice la $\iint_D \Pi^{\frac{p(1-\varepsilon)}{2}} |v_n|^p\, dxdy = 1$, valida per ogni n.

Caso di dominio non limitato con frontiera non tutta al finito.

Ci limitiamo al seguente caso particolare (ciò solo per ragione di semplicità) che generalizza il caso della striscia. Siano C_i, $i=1,2$, due curve di equazioni $y=\gamma_i(x)$ con $\gamma_2(x)-\gamma_1(x) > K^2$ per $-\infty < x < +\infty$; supponiamo le γ_i dotate di derivate prime e seconde limitate. Indichiamo con $C_1(t)$ e $C_2(t)$ le curve di equazioni $y=\gamma_1(x)+t$, $y=\gamma_2(x)-t$ per tutti i valori di t positivi sufficientemente piccoli, e con $D(t)$ il dominio $-{}^1/t \leq x \leq {}^1/t, \gamma_1(x)+t \leq y \leq \gamma_2(x)-t$ mentre con D s' intenderà il dominio $\gamma_1(x) \leq y \leq \gamma_2(x), -\infty < x < +\infty$; indichiamo poi con $P_{-i}(t)$ e $P_i(t)$, $i=1,2$, le intersezioni di $C_i(t)$ con le rette $x=-{}^1/t, x={}^1/t$.

Tenendo presente l' identità (3) ed eseguendo calcoli che per semplicità omettiamo, si ha:

$$(13)\quad \frac{d}{dt}\left[\sum_{1}^{2}{}_i\int_{-1/t}^{1/t}\left[\Pi u^2\left(1+f_i'^2\right)\right]_{C_i(t)} dx + t\int_{\gamma_1(1/t)+t}^{\gamma_2(1/t)-t} (\Pi u^2)_{x=1/t}\, dy + t^2\int_{\gamma_1(-1/t)+t}^{\gamma_2(-1/t)-t} (\Pi u^2)_{x=-1/t}\, dy\right] =$$

$$= -\frac{1}{t^2}\sum_{\substack{i=-2\\ i\neq 0}}^{2}(\Pi u^2)_{P_{i(t)}} - \left[\Pi u^2\left(t-\frac{\gamma_1'}{t}\right)^2\right]_{P_{1(t)}} - \left[\Pi u^2\left(t+\frac{\gamma_1'}{t}\right)^2\right]_{P_{-1(t)}} - \left[\Pi u^2\left(t+\frac{\gamma_2'}{t}\right)^2\right]_{P_{(t)}} -$$

$$-\left[\Pi u^2\left(t-\frac{\gamma'_2}{t}\right)^2\right]_{P_{-2}(t)}+\iint_{D(t)}(M[\Pi]+c\Pi)u^2dxdy-2\iint_{D'(t)}\Pi\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+$$

$$+\int_{\gamma_1(1/t)+t}^{\gamma_2(1/t)-t}\left|\left[(2t+a)\Pi-2\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right]u^2\right|_{x=1/t}dy+\int_{\gamma_1(-1/t)+t}^{\gamma_2(-1/t)-t}\left|\left[(2t-a)\Pi+2\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right]u^2\right|_{x=-1/t}dy+\sum_1^2{}_i(-1)^{i+1}$$

$$\cdot\int_{-1/t}^{1/t}\left|\left[\frac{\partial\Pi}{\partial y}(2+\gamma_i'^2)-2\frac{\partial\Pi}{\partial x}-\Pi(b-a\gamma_i'+\gamma_i'')\right]u\right|_{C_i(t)}dx-2\iint_{D(t)}\Pi uL[u]dxdy.$$

Dall' indentità (13) si deduce il seguente teorema di unicità:

Se a, b, c, γ_i', γ_i'' *si mantengono limitate, se esiste una funzione* Π *continua e positiva in* D, *dotata delle derivate parziali prime e seconde continue, tale che* $M[\Pi]+c\,\Pi\leq 0$, $\left|\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right|\leq\mu\,\Pi$, $\left|\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right|\leq\mu\,\Pi$, *per una certa costante positiva* μ, *allora nella classe delle funzioni* u *che in* D-FD *sono dotate delle derivate parziali prime e seconde continue e che soddisfano le condizioni all' infinito*

(14) $$\lim_{t\to 0}\int_{\gamma_1(1/t)+t}^{\gamma_2(1/t)-t}(\Pi u^2)_{x=1/t}dy=\lim_{t\to 0}\int_{\gamma_1(-1/t)+t}^{\gamma_2(-1/t)-t}(\Pi u^2)_{x=-1/t}dy=0$$

ve n' è al più una tale che

$$L[u]=f \text{ in } D-FD$$

(15) $$\lim_{t\to 0}\sum_1^2{}_i\int_{-1/t}^{+1/t}[\Pi(u-\bar{u}_i)^2]_{C_i(t)}dx=0$$

essendo $\bar{u}_i(x)$, $i=1,2$, *due assegnate funzioni di quadrato sommabile su ogni intervallo dell' asse* x [1]).

---

[1]) P. es. se $M[v]+cv=\Delta v+\alpha\frac{\partial v}{\partial x}+\beta\frac{\partial v}{\partial y}+\gamma v$ e se $\gamma<-m^2$, $|\alpha|\leq\mu$, $|\beta|\leq\mu$, si può prendere $\Pi=\exp.\left[-\left(\sqrt{m^2+\mu^2}-\mu\right)\sqrt{x^2+y^2}\right]$; se $\gamma\leq 0$, $|\alpha|\leq\mu$, $|\beta|\leq\mu$ e se $|\gamma_1(x)|\leq H$ $|\gamma_2(x)|\leq H$ si può prendere $\Pi=\cos\frac{\pi-\delta}{2H}y\,.\,\exp\,(-k\,|x|)$ essendo δ un numero tale che $0<\delta<\pi$, $\left(\frac{\pi-\delta}{H}\right)^2-2\mu\frac{\pi-\delta}{H}tg\frac{\pi-\delta}{2}>0$, e

$$k=\frac{1}{2}\left[-\mu+\sqrt{\mu^2+\left(\frac{\pi-\delta}{H}\right)^2-2\mu\frac{\pi-\delta}{H}tg\frac{\pi-\delta}{2}}\right].$$

In modo del tutte simile a quello seguito precedentemente, consideriamo lo spazio Σ delle terne $(f(x,y),\varphi_1(x),\varphi_2(x))$ tali che $\Pi^{1-\varepsilon}f^2,(\Pi)_{C_1}\varphi_1^2,(\Pi)_{C_2}\varphi_2^2$ per un certo ε, $(0\leq\varepsilon<1)$, siano sommabili rispettivamente in D e su $-\infty<x<\infty$; in dichiamo con Σ_l il sottospazio di Σ delle terne $(L[u],(u)_{C_1}(u)_{C_2})$ essendo u una funzione che in tutto D è continua con le derivate prime e seconde, tale che Πu^2 è sommabile sulle curve $C_i^{(t)}$ e $\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}(\Pi u^2)_{C_i^{(t)}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(\Pi u^2)_{C_i}dx$; infine indichiamo con Σ' lo spazio, duale di Σ, delle terne (F,Φ_1,Φ_2) con $\Pi^{\varepsilon-1}F^2$, $(\Pi)_{C_1}\Phi_1^2,(\Pi)_{C_2}\Phi_2^2$ sommabili rispettivamenle su D e su $-\infty<x<+\infty$. Ebbene:

Nelle ipotesi già specificate su Π, *se vale il teorema di unicità anche per il problema aggiunto, se* Π *è infinitesima all'infinito, uniformemente sommabile sulle curve* $C_i^{(t)}$ *e*

$$\lim_{|x|\to\infty}\int_{\gamma_1(x)}^{\gamma_2(x)}\Pi dy=0,$$

allora, se riesce

$$\iint_D FL[u]dxdy+\sum_1^2{}_i\int_{-\infty}^{+\infty}(u)_{C_i}\Phi_i dx=0 \tag{16}$$

per una terna (F,Φ_1,Φ_2) *di* Σ' *e qualunque sia* u *in* Σ_l, *è* $(F,\Phi_1,\Phi_2)=0$

Il ragionamento si conduce in modo perfettamente simile a quanto già fatto. Pensati i coefficienti di L prolungati nelle striscie $\gamma_1(x)-d\leq y\leq\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)\leq y\leq\gamma_2(x)+d$, $-\infty<x<+\infty$, con lo stesso ordine di regolarità che hanno in D, si porrà

$$V(P,Q)=U^*(P,Q)\left(1-\frac{\overline{PQ}^5}{r^5}\right)^3\quad,\qquad(r<d)$$

La discontinuità di $\frac{\partial\Pi}{\partial x}$ per $x=0$ non crea difficoltà perchè nello stabilire l'identità (3) si può sostituire al dominio $D(t)$ le due porzioni in cui esso resta scomposto dalla retta $x=0$ onde al secondo membro figurerà in più il termine negativo $-2k\int_{\gamma_1(0)+t}^{\gamma_2(0)-t}\cos\frac{\pi-\delta}{2H}y\,u^2(0,y)dy$.

essendo U^* definito come precedentemente. Osserviamo che le funzioni u di Σ_i considerate nel lavoro citato a pag. 5

$$v_\mu(P)=\begin{cases} V(P,Q)\left[1-\left(1-\frac{\overline{PQ}^3}{r^3}\right)^\mu\right] & \text{per } \overline{PQ}\leq r \\ 0 & \text{"} \ \overline{PQ}\geq r \end{cases}$$

soddisfano tutte le condizioni richieste per gli elementi dello spazio Σ così come è qui definito.

Pertanto, fissata una terna (f,φ_1,φ_2) di Σ, resta assicurata l'esistenza di una successione $\{u_n\}$ di funzioni continue con le derivate prime e seconde, tali che $\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}(\Pi u^2_n)_{C_i(t)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(\Pi u^2_n)_{C_i} dx$ (qualunque sia n) per cui

$$(17)\qquad \lim_{n\to\infty}\iint_D \Pi^{1-\varepsilon}(f-L[u_n])^2dxdy=0,\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\Pi\,(\varphi_i-u_n)^2]_{C_i}\,dx=0.$$

Sussiste il teorema:

Nelle ipotesi già specificate su Π, *se, di più, per un certo* $\varepsilon>0$ *e* <1 *è*

$$\lim_{|x|\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Pi^\varepsilon dy=0^{1)},$$

---

[1]) Le ulteriorità ipotesi fatte su Π sono soddisfatte nel caso considerato nella nota precedente. Riferendoci alla equazione $\Delta u=f$ per il problema (15) relativamente alla striscia $0\leq y\leq a$, $-\infty<x<+\infty$, è assicurata l'unicità della soluzione se $\lim_{|x|\to\infty}\int_{1/|x|}^{a-1/|x|}e^{-k|x|}u^2dy=0$, e l'esistenza se $\varphi_i^2(x)e^{-k|x|}$, $i=1,2$, è sommabile su $-\infty<x+\infty$, ed $f(x,y)$ è localmente hölderiana ed $e^{-k|x|}\,f^2(x,y)$ è sommabile sulla striscia $0\leq y\leq a$, $-\infty<x<+\infty$, essendo k un numero positivo $<\pi/a$.

Si possono porre a raffronto queste condizioni con quelle date da C. Birindelli nei lavori citati in [4]). L'unicità della soluzione è ivi assicurata se $\lim_{|x|\to\infty} e^{-\pi|x|/a}u=0$ uniformemente rispetto a y; l'esistenza se: le $\varphi_i(x)$ $i=1,2$, sono continue e i loro prodotti per $e^{\pi|x|/a}$ convergono a zero per $|x|\to\infty$ e sono integrabili su $-\infty<x<+\infty$; $f(x,y)$ è continua e localmente hölderiana con $\lim_{|x|\to\infty} f(x,v)$ $e^{-\pi|x|/a}=0$ uniformemente rispetto a y e $\lim_{|x|\to\infty} V(x)\,e^{-\pi|x|/a}=0$, essendo $V(x)$ la variazione totale di $f(x,y)$ rispetto a y su $0\leq y\leq a$; infine la funzione $f(x,y)e^{-\pi|x|/a}$

allora la successione $\{u_n\}$, *o una sua subordinata, converge a una funzione u che in D-FD é soluzione regolare di* $L[u]=f$ *e converge in media su* C_i *a* $\varphi_i(x)$ *avendo il comportamento all' infinito indicato precedentemente.*

Supponiamo che esistano due costanti positive H e p con $2<p<3$ tali che

$$\iint_D \Pi^{\frac{p(1-\varepsilon)}{2}} |u_n|^p \, dxdy < H$$

qualunque sia n.

Si riconosce al solito modo che la successione $\{u_n\}$ (o una sua subordinata) converge uniformemente, in ogni dominio limitato interno a D, a una funzione continua u. Posto

$$u_{\mu\nu}=u_\mu-u_\nu \ , \ \omega_{\mu\nu}(t)=\sum_{i=1}^{2}\int_{-1/t}^{1/t}[\Pi u^2_{\mu\nu}(1+f'^2_i)]_{C_i^t}\, dx,$$

dall' identità (13) integrando tra t_0 e t $(0<t_0<t)$, si ha

$$(18) \quad \omega_{\mu\nu}(t)<\omega_{\mu\nu}(t_0)+M_1\int_{t_0}^{t}\omega_{\mu\nu}(\tau)d\tau+t_0\int_{\gamma_1(1/t_0)+t_0}^{\gamma_2(1/t_0)-t_0}(\Pi u^2_{\mu\nu})_{x=1/t_0}\, dy+t_0\int_{\gamma_1(-1/t_0)+t_0}^{\gamma_2(-1/t_0)-t_0}(\Pi u^2_{\mu\nu})_{x=-1/t_0}dy+$$

$$+M_2\int_{t_0}^{t}d\tau\left(\int_{\gamma_1(1/\tau)+\tau}^{\gamma_2(1/\tau)-\tau}(\Pi u^2_{\mu\nu})_{x=1/\tau}dy+\int_{\gamma_1(-1/\tau)+\tau}^{\gamma_2(-1/\tau)-\tau}(\Pi u^2_{\mu\nu})_{x=-1/\tau}dy\right)-2\int_{t_0}^{t}d\tau\iint_{D(\tau)}[\Pi u_{\mu\nu}L\, u_{\mu\nu}]dP$$

per due certe costanti positive M_1 ed M_2. Consideriamo i segmenti $x=\pm 1/t_0$ $\gamma_1(\pm 1/t_0)+t_0\leq y\leq\gamma_2(\pm 1/t_0)-t_0$, ad ogni loro punto associamo un cerchio Ω_{i_0} di raggio t_0 e centro in tal punto; usando la formola di media (9) si ha

---

è integrabile sulla striscia, è integrabile sulle semirette parallele ai lati della striscia e aventi l' origine sull' asse delle y riuscendo questi ultimi integrali funzioni continue di y.

Le condizioni del presente lavoro risultano più generali da un certo punto di vista qualitativo e più particolari da un certo punto di vista quantitativo. Noi abbiamo considerato una convergenza in media secondo il quadrato ma tutto può ripetersi sostituendo una convergenza in media d' ordine >1 e può darsi che un esame più approfondito permetta di sostituire addirittura π/a a k. In ogni modo il tipo di condizione all' infinito è più generale perchè globale anzichè puntuale. Si può poi osservare che una volta in possesso di una formola esplicita come quella di Boggio, all' esame del comportamento puntuale di essa sulla frontiera si può sostituire quello della convergenza in media rispetto a una opportuna funzione peso.

$$\int\limits_{\gamma_1(\pm 1/t_0)+t_0}^{\gamma_2(\pm 1/t_0)-t_0} (\Pi u'_{\mu\nu})_{x=\pm 1/t_0}\, dy < \int\limits_{\gamma_1(\pm 1/t_0)+t_0}^{\gamma_2(\pm 1/t_0)-t_0} \Big\{ \Pi \Big[\iint\limits_{\Omega_{t_0}} \Pi^{\varepsilon-1} V^2 dP \iint\limits_{\Omega_{t_0}} \Pi^{1-\varepsilon} L^2[u_{\mu\nu}] dP +$$

$$+ \Big(\iint\limits_{\Omega_{t_0}} \Pi^{\frac{p(1-\varepsilon)}{2}} |u_{\mu\nu}|^p dP \Big)^{\frac{2}{p}} \Big(\iint\limits_{\Omega_{t_0}} \Pi^{-\frac{p(1-\varepsilon)}{2(p-1)}} |M[V]|^{\frac{p}{p-1}} dP \Big)^{\frac{2(p-1)}{p}} \Big] \Big\} dy_{x=\pm 1/t_0}$$

Di qui, tenendo presenti le ipotesi fatte su Π e la (12), si deduce che

$$\lim_{t_0 \to 0} \int\limits_{\gamma_1(\pm 1/t_0)+t_0}^{\gamma_2(\pm 1/t_0)-t_0} (\Pi u'_{\mu\nu})_{x=\pm 1/t_0}\, dy = 0.$$

Dalla (18) passando al limite per $t_0 \to 0$ si deduce

$$\sum_1^2{}_i \int\limits_{-1/t}^{1/t} (\Pi u'_{\mu\nu})_{C_i(t)}\, dx \leq \sum_1^2{}_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\Pi u'_{\mu\nu})_{C_i}\, dx + M_1 \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-1/\tau}^{1/\tau} \sum_1^2{}_i (\Pi u'_{\mu\nu})_{C_i(\tau)}\, dx +$$

$$+ M_2 \int\limits_0^t d\tau \Big(\int\limits_{\gamma_1(1/\tau)+\tau}^{\gamma_2(1/\tau)-\tau} (\Pi u'_{\mu\nu})_{x=1/\tau}\, dy + \int\limits_{\gamma_1(-1/\tau)+\tau}^{\gamma_2(-1/\tau)-\tau} (\Pi u'_{\mu\nu})_{x=-1/\tau}\, dy \Big) - 2 \int\limits_0^t d\tau \iint\limits_{D^{(\tau)}} \Pi u_{\mu\nu} L[u_{\mu\nu}] dP,$$

e quindi, ripetendo i ragionamenti fatti precedentemente in condizioni analoghe,

$$\omega_{\mu\nu}(t) < \overline{\omega} + M_1 \int\limits_0^t \omega_{\mu\nu}(\tau) d\tau,$$

essendo $\overline{\omega}$ infinitesimo per $\mu, \nu \to \infty$, $t \to 0$. Dopo di ciò il ragionamento prosegue al solito modo.

Breve studio di una trasformazione birazionale dell' S_5 complesso determinata da una trasformazione quadratica biduale

Nota del dott. **Pio Balsimelli,** *presentata dal socio* **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 7 giugno 1952)

Sunto. — Si introduce la trasformazione birazionale dedotta da una trasformazione quadratica biduale, si determinano i sistemi lineari di ipersuperficie ad essa legati e gli enti omologhi degli spazi fondamentali.

1) *Equazioni della trasformazione birazionale.*

Consideriamo il caso in cui la trasformazione quadratica biduale abbia i tre punti fondamentali distinti nei punti $U_1\,(u\,,0\,,0)$, $U_2\,(0\,,u\,,0)$, $U_3\,(0\,,0\,,u)$ (u essendo il modulo dell' algebra biduale). Le sue equazioni sono:

$$(1) \qquad \begin{cases} \gamma'_1 = \gamma_2\ \gamma_3 \\ \gamma'_2 = \gamma_1\ \gamma_3 \\ \gamma'_3 = \gamma_1\ \gamma_2 \end{cases}$$

e posto al solito:

$$\begin{aligned} \gamma'_i &= x'_i\, u + y'_i\, \varepsilon \\ \gamma_i &= x_i\, u + y_i\, \varepsilon \end{aligned} \qquad (i = 1 \ldots 3)$$

esse determinano nell' S_5 complesso, $(x_1, \ldots y_3)$ ambiente della prima rappresentazione del piano biduale, la trasformazione quadratica di equazioni

$$(2) \qquad \begin{cases} x'_1 = x_2\, x_3 \\ y'_1 = x_2\, y_3 + x_3\, y_2 \\ x'_2 = x_1\, x_3 \\ y'_2 = x_1\, y_3 + y_1\, x_3 \\ x'_3 = x_1\, x_2 \\ y'_3 = x_1\, y_2 + x_2\, y_1 \end{cases}$$

che, per la sua stessa genesi, trasforma la congruenza di rette del nostro S_5 in sè. Tale trasformazione è birazionale in quanto esistono le formule inverse delle (2) rappresentate da:

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = 2\,x'_1\,x'^2_2\,x'^2_3 \\ y_1 = -x'^2_2\,x'^2_3\,y'_1 + x'_1\,x'_2\,x'^2_3\,y'_2 + x'_1\,x'^2_2\,x'_3\,y'_3 \\ x_2 = 2\,x'^2_1\,x'_2\,x'^2_3 \\ y_2 = x'_1\,x'_2\,x'^2_3\,y'_1 - x'^2_1\,x'^2_3\,y'_2 + x'^2_1\,x'_2\,x'_3\,y'_3 \\ x_3 = 2\,x'^2_1\,x'^2_2\,x'_3 \\ y_3 = x'_1\,x'^2_2\,x'_3\,y'_1 + x'^2_1\,x'_2\,x'_3\,y'_2 - x'^2_1\,x'^2_2\,y'_3 \end{cases}$$

che determinano una trasformazione del quinto ordine dell' S_5. Tale trasformazione presenta, come si può verificare con semplici calcoli, la notevole proprietà di operare tra le rette della congruenza allo stesso modo della trasformazione quadratica immagine nell' S_5 della trasformazione biduale inversa della data di equazioni:

$$(1')\qquad \begin{cases} \gamma_1 = \gamma'_2\,\gamma'_3 \\ \gamma_2 = \gamma'_1\,\gamma'_3 \\ \gamma_3 = \gamma'_2\,\gamma'_1 \end{cases}$$

E' da notare inoltre che la (2) e la (3) subordinano nel piano $\pi \equiv A_2 A_4 A_6$ due trasformazioni quadratiche aventi per punti fondamentali i punti $A_2\ A_4\ A_6$, e che si ottengono da (1) e (1') per semplice sostituzione delle γ_i con x_i.

2) *Sistemi omaloidici di ipersuperficie legati alle trasformazioni (2) e (3), loro varietà basi ed enti omologhi corrispondenti.*

In corrispondenza alle trasformazioni (2) e (3) si hanno i sistemi omaloidici di equazioni:

$$(4)\qquad \lambda_1\,x_2\,x_3 + \lambda_2\,(x_2\,y_3 + x_3\,y_2) + \lambda_3\,x_1\,x_3 + \lambda_4\,(x_1\,y_3 + x_3\,y_1) + \\ + \lambda_5\,x_1\,x_2 + \lambda_6\,(x_1\,y_2 + x_2\,y_1) = 0$$

$$(5)\qquad \lambda_1\,x_1\,x_2^2\,x_3^2 + \lambda_2\,x_1^2\,x_2\,x_3^2 + \lambda_3\,x_1^2\,x_2^2\,x_3 + \lambda_4\,(-x_2^2\,x_3^2\,y_1 + x_1\,x_2\,x_3^2\,y_2 + \\ + x_1\,x_2^2\,x_3\,y_3) + \lambda_5\,(x_1\,x_2\,x_3^2\,y_1 - x_1^2\,x_3^2\,y_2 + x_1^2\,x_2\,x_3\,y_3) + \lambda_6\,(x_1\,x_2^2\,x_3\,y_1 + \\ + x_1^2\,x_2\,x_3\,y_2 - x_1^2\,x_2^2\,y_3) = 0$$

(nel sistema (5) le variabili con apici sono state sostituite da quelle senza apici il che non implica nello studio del sistema).

La varietà base del sistema (4) é costituita dal piano $\pi \equiv A_2\ A_4\ A_6$ e dalle rette $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, $A_5 A_6$, piano e rette che sono semplici per la generica iperquadrica (4). Per caratterizzare ulteriormente il sistema basta considerare i 3 fasci di quadriche ottenuti intersecando il sistema (4) con i tre $S_3 \equiv A_1 A_2 A_3 A_4$, $S'_3 \equiv A_1 A_2 A_5 A_6$, $S''_3 \equiv A_3 A_4 A_5 A_6$. Il primo fascio è costituito da tutte e sole le quadriche passanti per le tre rette $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, $A_2 A_4$, caratterizzate dalla ulteriore proprietà che la proiettività determi-

nata dalle generatrici sulle due direttrici fisse $A_1 A_2$, $A_3 A_4$ è un' involuzione. Osservazioni analoghe valgono per i due fasci determinati dagli altri due S_3.

I punti base di (4) sono evidentemente eccezionali per la trasformazione (2). Ad un generico punto P di π corrisponde tutto il piano π (per il seguito si suppone che $S_5 \equiv S_5'$) in quanto, considerata una generica retta PM e detto Q il punto infinitamente vicino a P nella direzione PM, l' omologo Q' fornito dalle (2) è un ben determinato punto di π, che al variare della PM descrive tutto π, con l' ulteriore precisazione che, se M si fa variare nell' $S_3 \equiv \pi M$ da esso determinato, il punto Q' non varia e quindi in corrispondenza agli ∞^2 punti dell' intorno del I⁰ ordine di P situati in uno di tali S_3 si ha un sol punto omologo Q'; l' intorno quadrimensionale del I⁰ ordine di P viene così ad essere suddiviso in ∞^2 intorni bidimensionali di P ognuno dei quali determina un punto Q'

Ad un generico punto P della retta base $A_1 A_2$ corrisponde l' S_3 complementare $A_3 A_4 A_5 A_6$. Considerata infatti una retta PM per P si ha in corrispondenza al piano $\alpha \equiv A_1 A_2 M$ un ben determinato punto Q' omologo per (2) dell' intorno di I⁰ ordine di P situato in α; variando α il punto Q' descrive, in corrispondenza agli ∞^3 piani della stella di vertice la retta $A_1 A_2$, tutto l' S_3 suddetto. Poichè ogni piano α seca l' S_3 in un punto M^* viene a determinarsi tra M^* e Q' una corrispondenza che è precisamente una proiettività di matrice:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \lambda \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \lambda & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

dove λ e μ sono le coordinate non nulle x_1 ed y_1 del punto P della retta $A_1 A_2$ considerata.

Si dimostra inoltre che in corrispondenza alle ∞^3 rette infinitamente vicine alla $A_1 A_2$ si hanno nell' $S_3 \equiv A_3 A_4 A_5 A_6$ ∞^2 rette di una congruenza monoassiale di asse la retta $A_4 A_6$ e ciò in corrispondenza al fatto che la trasformazione biduale (1) fa corrispondere agli ∞^2 punti dell' intorno del I⁰ ordine di $U_1 (1, 0, 0)$ (rappresentato dalla retta $A_1 A_2$ della congruenza) i punti della retta biduale $U_2 U_3$ rappresentati dalle rette della congruenza monoassiale dell' S_3 suddetto. Per la simmetria delle formule (2) quanto s' è detto per la retta $A_1 A_2$ vale per le rette $A_3 A_4$ ed $A_5 A_6$.

Passando ora allo studio del sistema lineare (5) si vede come esso sia costituito dalle ipersuperficie quintiche dell' S_5 complesso aventi il piano π come quadruplo e le rette $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, $A_5 A_6$ come triple. Il comportamento dei punti eccezionali della trasformazione legata al sistema (5) è analogo a quello visto per la trasformazione (2).

Ogni punto M, tenendo ferme le notazioni precedenti relative al caso del generico punto P di π, determina un S_3 per π e tale S_3 un punto Q' di π. Tra le coordinate di Q' e quelle del punto P^* in cui l' S_3 suddetto seca il piano $\pi' \equiv A_1 A_3 A_5$ viene a generarsi una trasformazione di ordine quattro evidentemente birazionale di equazioni:

$$\begin{cases} y_1 = -\lambda x_2^2 x_3^2 + \mu x_1 x_2 x_3^2 + \nu x_1 x_2^2 x_3 \\ y_2 = \lambda x_1 x_2 x_3^2 - \mu x_1^2 x_3^2 + \nu x_1^2 x_2 x_3 \\ y_3 = \lambda x_1 x_2^2 x_3 + \mu x_1^2 x_2 x_3 - \nu x_1^2 x_2^2 \end{cases}$$

(dove y_i ed x_i rappresentano le coordinate di Q' e P^* rispettivamente).

Tale trasformazione varia al variare P in π. Si vede infine che ad ogni punto P della retta $r \equiv A_1 A_2$ corrisponde tutto l' S_3 complementare e che anche in tal caso, come per la (2), se M varia in un piano α uscente da r il punto Q' non varia nell' S_3 suddetto e che se diciamo M^* il punto in cui α seca S_3 tra M^* e Q' si ha una trasformazione quadratica.

Osservazioni analoghe valgono per le altre due rette fondamentali $A_3 A_4$ ed $A_5 A_6$.

Fotometria stellare a Capodimonte

Nota del socio corrisp. **Attilio Colacevich**

(Adunanza del dì 8 novembre 1952)

Sunto. — Si descrive brevemente il fotometro fotoelettrico costruito per l'osservatorio di Capodimonte ed applicato al rifrattore Fraunhofer di 17 cm. di apertura. Questo fotometro permette di stabilire le grandezze delle stelle fino alla decima grandezza con la precisione di $\pm$ 0.01 grandezza nelle condizioni atmosferiche napoletane.

Il programma di lavoro riguarda la determinazione delle curve di luce di stelle variabili ad eclisse. Sono già state stabilite le curve di luce per le tre variabili V 451 Ophiuchi, V 566 Ophiuchi e V 805 Aquilae.

Una notevole parte dell' attività dell' Osservatorio di Capodimonte è stata svolta in quest' ultimo anno verso la fotometria stellare. Si è voluto in questo modo riprendere una vecchia tradizione di questo Osservatorio Se si scorrono i lavori pubblicati tra il 1913 ed il 1934 se ne contano ben 38 di fotometria eseguiti sotto la guida del prof. A. Bemporad, direttore dell' Osservatorio in quel periodo. Essi vanno dai lavori teorici sull' estin-

zione, di cui il BEMPORAD fu ben noto maestro, a descrizioni di strumenti, ad una nutrita serie di osservazioni di stelle variabili, la maggior parte appartenenti alle cosidette doppie ad eclisse, per opera sia del BEMPORAD stesso che degli astronomi dell' Osservatorio (S. AURINO, M. MEROLA, O. LAZZARINO, G. VIOLA, E. GUERRIERI G. ZAPPA, A. FRESA, M. VIARO). Le prime osservazioni vennero pubblicate proprio nei Rendiconti della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli.

Ho ritenuto utile riprendere questa serie di osservazioni con i metodi moderni della fotometria fotoelettrica, in luogo delle meno precise osservazioni dirette visuali del tempo precedente. Ciò anche perchè con i modesti mezzi attuali dell' Osservatorio questo è l' unico campo dell' astrofisica dove oggi si può utilmente produrre. La precisione delle odierne misure fotoelettriche è per lo meno dieci volte maggiore di quelle fatte con metodi visuali ed in taluni casi esse lo sono anche cento volte. Infatti l' errore medio di una misura visuale è dell' ordine $\pm$ 0,1 grandezza, quelle fotoelettriche sono di$\pm$0,01 ed in taluni casi anche$\pm$come 0,001 grandezze. Era da vedere se le condizioni di osservazione in Napoli permettevano di raggiungere questa precisione. Infatti in confronto a trenta anni fa la zona abitata intorno all' Osservatorio si è notevolmente estesa, specie dalla parte del Vomero, e tutta l' illuminazione elettrica non può certamente favorire le osservazioni. Se inoltre si tien conto dello sviluppo industriale ad Est dell' Osservatorio e del volume di fumo che viene diffuso nel cielo, si poteva giustamente essere dubbiosi sulle odierne possibilità della fotometria a Capodimonte. Si può senz' altro qui affermare che come risultato delle osservazioni fatte, per esami differenziali di stelle prossime, si può raggiungere a Capodimonte la precisione di$\pm$0,01 grandezze stellari. Questo risultato, insieme ai lunghi periodi di cielo sereno di cui gode Napoli, permette di poter lavorare utilmente nel campo delle variabili più splendenti della decima grandezza con l' attuale dotazione nell' Osservatorio.

Nel campo della fotometria fotoelettrica già produsse in Italia il MAGGINI a Collurania (presso Teramo) (1932-1937). I metodi fotometrici di quell' epoca non permettevano però di spingersi a stelle deboli. Infatti col rifrattore di 50 cm di Collurania, MAGGINI riuscì ad eseguire misure su stelle di 5ª grandezza, mentre qui in Capodimonte con un cannocchiale di apertura 3 volte più piccola si riesce oggi a fotometrare stelle sulla decima grandezza.

La fotometria fotoelettrica ha preso un notevole impulso con l' introduzione nell' astronomia della fotocella a moltiplicazione interna. In particolare stima è tenuta, per la sua grande sensibilità e per il basso rumore di fondo la fotocella della RCA del tipo detto 931 A, o ancor meglio quella più pregiata detta 1P21. Il fotometro di Capodimonte ha una di queste ultime fotocelle. Il fotometro è applicato al rifrattore di Fraunhofer dell' Osservatorio; esso ha un' apertura utile di 17,5 cm. ed una focale di 302 cm.

Una stella di 10 grandezza invia sulla fotocella circa $2x10^{-15}$ Watt. La fotocella dopo i nove stadi di amplificazione interna, invia in uscita una corrente di 10^{-9}A. A questo punto si può far uso di un buon galvanometro. Questo però richiederebbe per l'uso del fotometro, la presenza di due persone: una al telescopio per puntare l'astro ed una al galvanometro per fare le letture. Molto più comodamente tali misure possono essere fatte da una sola persona se si possiede un registratore di piccole correnti. Questo però richiede correnti dell'ordine di 0,1 mA almeno (registratore SWRI della C. G. S. di Monza). A tale scopo necessita un'ulteriore amplificazione. La corrente di uscita della fotocella viene fatta perciò passare attraverso una opportuna resistenza di uscita. Per una stella di 10ª grandezza ed una resistenza di 100 Mega Ohm, si ha una caduta di potenziale di 0,1 Volt. La caduta di tensione viene trasmessa alla griglia di una valvola del sistema di amplificazione. Il sistema adottato a Capodimonte è quello proposto da G. E. Kron (« *Electronics* », Agosto 1948): esso richiede l'uso di 6 valvole due a due uguali in tre circuiti successivi bilanciati, tipo ponte di Wheatstone. Sull'ultimo di questi viene inserito il milliamperometro registratore. Quando la fotocella invia il suo piccolo segnale, il sistema viene sbilanciato e passa nel registratore una corrente che può venire registrata su un nastro di carta scorrente. Questo sistema ha il notevole vantaggio di una grande stabilità dello zero (e ciò perchè del tipo detto di *feedback*) e di una linearità di risposta. Per quest'ultimo motivo, dato che anche la fotocella invia tanta più corrente quanto maggiore è il flusso effettivo, si ha nel complesso uno strumento che registra direttamente l'intensità del flusso luminoso. La sensibilità dello strumento può essere variata in trenta intervalli in progressione geometrica da uno a mille, a piacere dell'osservatore.

Lo stesso strumento è corredato da una batteria di pile di 900 Volt per le tensioni della fotocella e di un generatore di tensioni per il funzionamento dell'amplificatore. Lo strumento è stato realizzato nelle officine degli osservatori di Arcetri e di Capodimonte e grazie vanno rese al sig. B. Terchi ed al sig. V. Casella, capi dei servizi officina dei due rispettivi Osservatori, per l'ottimo lavoro fatto.

Il programma di lavoro del fotometro, applicato al Fraunhofer è necessariamente limitato a stelle più splendenti della decima grandezza per osservazioni fatte senza alcun filtro ed alle stelle di ottava grandezza usando filtri attualmente corredanti lo strumento stesso (lunghezza d'onda efficaci di 4000 e 5300 A rispettivamente). Il programma consiste nella osservazione sistematica di tutte le stelle variabili ad eclisse o presunte tali per le quali non vi siano curve di luce fotoelettriche. La bontà delle misure fotoelettriche fa sì che le precedenti misure visuali o fotografiche per queste stelle siano in genere talmente grossolane, da considerarsi del

tutto sorprassate per ciò che riguarda la determinazione degli elementi delle costanti orbitali.

Conviene spendere qualche parola in più per spiegare la necessità e l'importanza delle misure fotoelettriche per queste stelle.

Le stelle doppie fotometriche o binarie ad eclisse, come vengono pure chiamate, consistono di due stelle, in genere non molto lontane fra loro e di dimensioni non molto diverse, tanto che non vi è alcuna possibilità di osservare direttamente la duplicità.

Se però, come per esse avviene, il piano di rivoluzione del sistema è poco inclinato rispetto alla direzione della visuale, allora si ha il fenomeno del mutuo eclisse delle due componenti.

L'osservatore stabilisce il valore dell'intensità del sistema in funzione del tempo. L'andamento del fenomeno è periodico, e nel caso normale dipende da circa 15 parametri. Nei casi più generali, e che non sono i meno frequenti, il numero dei parametri può salire a 20 ed anche più, in taluni casi anche la periodicità del fenomeno è rispettata solamente nelle sue linee generali. Per fortuna non tutti i parametri sono ugualmente difficili a stabilire ed è importante rilevare che è proprio da queste osservazioni, insieme quelle spettroscopiche, che gli astronomi riescono a stabilire con la massima precisione i raggi delle stelle, le masse, taluni fenomeni superficiali come l'estensione della loro atmosfera, la rotazione ed anche l'eventuale presenza di macchie e di protuberanze.

A parte però pochi fortunati casi, negli altri la possibilità, di avere almeno alcuni parametri con una certa sicurezza dipende dalla precisione delle osservazioni. Infatti possiamo dire che certi parametri entrano solamente in caratteristiche di ordine secondario ed in genere al di sotto delle più accurate osservazioni visuali o fotografiche.

Oggi le osservazioni fotoelettriche permettono di ricavare i raggi delle due componenti con precisioni di circa il 5%, l'inclinazione del piano dell'orbita con la precisione di 1^0, il rapporto tra le temperature superficiali delle stelle con la precisione del 5%, l'eventuale deformazione ellissoidica delle componenti con il 10%. Già però notevolmente più incerta è la determinazione del cosidetto oscuramento al lembo. E' questo un dato di importanza astrofisica e che indica essere il lembo di una od entrambe le componenti meno splendente del centro del disco stellare; conoscendo il valore di questo oscuramento al lembo si può risalire ad altri dati notevoli, quali l'estensione dell'atmosfera stellare. Per la determinazione di questo coefficiente in modo sicuro, conviene in genere osservare la variazione luminosa in due o più colori con opportuni filtri selettivi. In tale caso il flusso efficace risulta meno abbondante e, a meno che non si abbiano telescopi di grandi aperture, come purtroppo non è il caso a Capodimonte, lo studio deve restringersi a poche stelle più luminose, oramai già osservate.

Infine le odierne misure di precisione mettono in campo fenomeni nuovi che non possono essere spiegati variando come si voglia, nel loro campo di esistenza, i parametri già noti.

In un certo senso quindi oggi le osservazioni sono già talvolta migliori di quanto la teoria può prevedere. Brusche subitanee eruzioni sembrano esistere in taluni casi, fenomeni dell' atmosfera stelllare a carattere quasi periodico ed altri dettagli, la cui entità in genere è dell' ordine del centesimo di grandezza stellare, vengono sempre più alla luce. E' in questa direzione che l' astronomo tenta di spingere le sue osservazioni e le conseguenti analisi alla ricerca di sempre nuovi dati per la conoscenza della famiglia stellare.

Possiamo concludere che, come per le distanze stellari, le parallassi trigonometriche sono alla base di ogni sistema di misura, così per le caratteristiche fisiche delle stelle individuali, le stelle doppie ad eclisse forniscono i dati fondamentali. L' importanza dello studio di queste stelle è riconosciuta dalla esistenza di una apposita commissione in seno all' Unione Astronomica Internazionale. In occasione della riunione di Roma del settembre 1952 il lavoro fatto a Capodimonte ha trovato un lusinghiero apprezzamento nelle parole del presidente della Commissione.

I primi tre casi esaminati a fondo a Capodimonte riguardano le tre variabili ad eclisse di ottava grandezza: V 451 Ophiuchi, V 566 Ophiuchi e V 805 Aquilae. Sono state eseguite in totale circa 1200 osservazioni individuali. La durata di una singola osservazione è in genere attorno ai 10 minuti. Le curve di luce ricavate serviranno per il calcolo degli elementi. Si può fin d' ora osservare però che queste sono le prime curve veramente significative di queste tre variabili sia per la precisione che per il periodo di variazione di luce. Serie precedenti sia visuali che fotografiche, anche numerose, portavano a risultati che sono oggi del tutto da scartare.

Per proseguire utilmente in questa fruttuosa linea di ricerche, l' Osservatorio di Capodimonte ha necessità di un telescopio più adeguato, di apertura non inferiore ai 50 cm., ed in questo caso il campo sarà notevolmente più esteso e più ricca quindi la messe.

Concezioni cosmiche di Leopardi

Nota del socio ordinario **Giuseppe De Lorenzo**

(Adunanza del dì 8 novembre 1952)

Sunto. — Questa Nota vuole essere un' aggiunta alle precedenti, pubblicate in questo Rendiconto: *Le teorie di Einstein,* nel febbraio del 1950; *Concezioni del mondo antiche e moderne,* nel giugno del 1951; e *Instabilità ed inentità del mondo,* nel gennaio del 1952; per esporre più ampiamente ciò, che in quelle era solamente accennato: cioè le concezioni di Giacomo Leopardi sulla natura, l'origine e la fine del mondo

Nei Rendiconti di questa Accademia, del 1950, 1951 e 1952, ho pubblicato alcune Note, *Le teorie di Einstein, Concezioni del mondo antiche e moderne* ed *Instabilità ed inentità del mondo,* nelle quali ho cercato di dimostrare, che parecchi dei maggiori risultati delle moderne ricerche scientifiche induttive, analitiche, hanno le loro radici nelle concezioni intuitive, sintetiche, degli antichi sapienti dell' India, della Grecia e dell' Italia. Ed in esse ho segnalato anche le risonanze, che se ne trovano in pensatori e poeti congeniali, quali, p. es., Schopenhauer e Leopardi. Riprendo ora, ancora una volta, il tema, per esporre, più particolareggiatamente, quali siano state, in tale senso, le concezioni cosmologiche, antropologiche, psicologiche ed etiche di Leopardi.

Giacomo Leopardi è, come si sa, non solo sommo poeta, ma anche grande pensatore; ed il suo pensiero è così intrinseco alla sua poesia, da costituirne, a giudizio di un critico eminente, qual' è Benedetto Croce, un fattore di deterioramento. Ma questo giudizio a me non pare giusto. Esso si potrebbe egualmente applicare a Dante, che in fatto di pensiero non scherza, e giudicare, perciò. deteriore la poesia del suo *poema sacro, al quale ha posto mano e cielo e terra;* il quale, invece, ha tanta poesia, e più ancora, quanto ce n' è nell' *Orlando furioso* e nella *Gerusalemme liberata.* Ma Croce ed i suoi seguaci potrebbero trovare appoggio, per il loro giudizio, in quel che il Leopardi stesso scriveva nel suo *Zibaldone* il 26 giugno 1821: « La poesia, quanto è più filosofica, tanto meno è poesia. » Ma due anni dopo, l' 8 settembre 1823, *melius re perpensa,* con la mutazione comune ad ogni cervello in attività, Leopardi scriveva, più sennatamente, nello stesso *Zibaldone:* « E' tanto mirabile quanto vero, che la poesia la quale cerca per sua natura e proprietà il bello, e la filosofia ch' essenzialmente ricerca il vero, cioè la cosa più contraria al bello; sieno le facoltà

più affini tra loro, tanto che il vero poeta è sommamente disposto ad esser gran filosofo, il vero filosofo ad esser gran poeta; anzi nè l'uno nè l'altro non può esser nel gener suo nè perfetto nè grande, s'ei non partecipa più che mediocremente dell'altro genere, quanto all'indole primitiva dell'ingegno, alla disposizione naturale, alla forza dell'immaginazione... La poesia e la filosofia sono, entrambe del pari, quasi le sommità dell'umano spirito, le più nobili e le più difficili facoltà a cui possa applicarsi l'ingegno umano. » E di tale felice accoppiamento di poesia e filosofia il LEOPARDI è veramente un esempio meraviglioso.

Che LEOPARDI sia un grande, anzi un sommo poeta, nessuno può dubitarne. Che sia egualmente un grande filosofo, può dubitarne chi chiama filosofo solo colui, che ha concepito ed organicamente e completamente esposto un sistema, che è la sua filosofia; come altri sistemi, e diversi gli uni dagli altri, caratterizzano altri filosofi. Ma LEOPARDI è un filosòfo nel senso antico della parola: un amico della sapienza, un pensatore; come furono, tra tanti altri, EMPEDOCLE, EPICURO, LUCREZIO, BRUNO, che esposero in forma poetica le loro filosofie; solo che in quelli prepondera, appunto, la filosofia, mentre in LEOPARDI prevale la poesia. Ma i pensieri filosofici di LEOPARDI, sparsi nelle note del suo *Zibaldone,* condensati nei suoi scritti in prosa e balenanti nei versi dei suoi canti, sono tali e tanti, che noi possiamo con essi agevolmente costruire un sistema filosofico, che è appunto la filosofia di LEORARDI.

Questo, appunto, ha cercato di fare il dottor Hans ZINT in un bel saggio su *Giacomo Leopardi als Philosoph,* nel 28° *Jahrbuch der Schopenhauer Gesellschaft für das Jahr 1941,* Carl Winters Universitätsbuchhandlung, Heidelberg, 1941. In tale saggio lo ZINT comincia giustamente con l'osservare, che i critici del secolo scorso, qnando ancora non si conosceva la miniera di tesori filosofici e filologici, racchiusa nello *Zibaldone*, erravano nel considerare il LEOPARDI sia un semplice poeta del dolore del mondo, simile ai suoi contemporanei BYRON e LENAU, che un pessimista sullo stampo del suo fratello spirituale SCHOPENHAUER; e con la classifica di pessimista, che suscita sempre diffidenza negli uomini, contribuirono a non far riconoscere subito e ad apprezzare l'alto valore filosofico dei suoi pensieri; il quale consiste, non nell'elaborazione di un ordinato sistema, e nella specialità scientifica di esso, ma nel lavoro spirituale, animato da un vero amore filosofico per la conoscenza dell'eterno mistero del mondo: nel qual senso LEOPARDI è stato veramente un filosofo, ed uno dei più schietti. I suoi pensieri sul mondo e sulla vita, esposti in forma di appunti e di aforismi, e non in vena lirico-sentimentale, ma con la sobrietà e la asciuttezza di un lavoro mentale, sempre teso verso la comprensione del problema dell'esistenza del mondo e dell'essenza dell'uomo, e del loro valore morale, ricordano veramente i primi manoscritti, dai quali SCHOPENHAUER elaborò il suo sistema. E di un suo sistema filosofico parla sem-

pre, infatti, anche LEOPARDI; il quale, però, per le dolorose vicissitudini e la brevità della sua vita, non potè mai portarlo a compimento. Ma noi possiamo dalle sue membra sparse ricostruirne, in certo modo, un torso possente; che giganteggia nella storia del pensiero umano.

Anzitutto dobbiamo stabilire, che nel campo della cognizione teoretica LEOPARDI fu soprattutto inspirato dall' empirismo inglese e dal sensismo francese del seicento e del settecento, e non fu in alcun modo influenzato dall' idealismo tedesco di KANT e dei suoi seguaci; che egli non conobbe mai direttamente, ma solo per sentito dire, attraverso la STAËL. Infatti il 5 ottobre 1821 scriveva nello *Zibaldone*: « Quali sono le grandi scoperte di KANT, caposcuola, ecc. ecc.? Credo che niuno lo sappia, nemmeno i suoi discepoli. » Ma poi, per una di quelle improvvise folgorazioni del genio, nello stesso *Zibaldone* scriveva, il 14 dicembre 1826: « Il nostro intelletto è il solo luogo, dove il tempo e lo spazio, come tante altre cose astratte, esistono indipendentemente e per sè medesimi. » E questa è, *in nuce,* la vera essenza della *Critica della ragion pura* di KANT. Invece egli amava proclamare la concordanza della sua filosofia con le antiche filosofie pratiche, anche se tra loro discordi, quali la socratica primitiva, la cirenaica, la stoica, la cinica, oltre l' accademica e la scettica. E così dal suo primitivo empirismo e sensismo giungeva allo scetticismo ed al relativismo, che doveva poi informare tutta la sua filosofia teoretica, ritornando all' assioma' che egli aveva già segnato nello *Zibaldone* il 22 dicembre 1820: « Non vi è quasi altra verità assoluta se non che *Tutto è relativo.* »

Nella filosofia teoretica di LEOPARDI ha una parte importantissima la cosmologia. Egli già all' età di quindici anni aveva scritto una *Storia dell' astronomia,* dai tempi più antichi fino al 1811, in tre volumi di complessive 700 pagine manoscritte; e per lui, come per KANT, gli oggetti più degni di ammirazione e di meraviglia erano l' immensità del cielo stellato e la profondità dell' animo umano. Ma, anche in questo caso, egli mostra di non aver conosciuto, se non forse attraverso le lettere di LAMBERT e l' opera di LAPLACE, la concezione cosmica, esposta nel 1755 da KANT nella sua *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels.* Eppure, anche questa volta un lampo del suo genio gli fece poetare, nel 1830, la siderea armonia del *Canto notturno di un pastore errante dell' Asia,* che due anni dopo doveva trovare un contrappunto nella celeste melodia di *Casta diva* nella *Norma* di BELLINI, e nel 1836 la visione delle stelle fiammeggianti dall' alto nel purissimo azzurro, qual' è espressa nel canto de *La Ginestra:* i quali due canti sono come due purissime gemme, in cui è incisa, con perfezione mai prima nè dopo raggiunta, tutta la immensa concezione cosmica di KANT.

Ma, oltre queste gemme poetiche, LEOPARDI volle esprimere in prosa strettamente scientifica la sua concezione cosmica dell' origine e della fine del mondo; che egli scrisse, attribuendola, per finzione, a STRATONE da Lam-

paco, filosofo peripatetico, detto il fisico, vissuto da trecento anni avanti l'era cristiana, ed intitolandola appunto *Frammento apocrifo di Stratone da Lampsaco.* Lo scritto è di tale importanza, per la comprensione delle concezioni cosmiche di LEOPARDI, che all'Accademia ed agli eventuali lettori non sarà discaro, io credo, che io qui lo riproduca quasi integralmente Eccolo.

DELLA ORIGINE DEL MONDO

Le cose materiali, siccome elle periscono tutte ed hanno fine, così tutte ebbero incominciamento. Ma la materia stessa niuno incominciamento ebbe, cioè a dire che ella è per sua propria forza ab eterno. Imperocchè dal vedere che le cose materiali crescono e diminuiscono e all'ultimo si dissolvono, conchiudesche elle non sono per sè, nè ab eterno, ma incominciate e prodotte; per lo contrario, quello che mai non cresce nè scema e mai non perisce, si dovrà giudicare che mai non cominciasse e che non provenga da causa alcuna. E certamente in niun modo si potrebbe provare che delle due argomentazioni, se questa fosse falsa, quella fosse per vera. Ma poichè noi siamo certi quella esser vera, il medesimo abbiamo a concedere anche dell'altra. Ora noi veggiamo che la materia non si accresce mai di una eziandio menoma quantità, niuna anche menoma qnantità della materia si perde, in guisa che essa materia non è sottoposta a perire. Per tanto i diversi modi di essere della materia, i quali si veggono in quelle che noi chiamiamo creature materiali, sono caduchi e passeggeri; ma niun segno di caducità nè di mortalità si scopre nella materia universalmente, e però niun segno che ella sia cominciata, nè che ad essere le bisognasse o pure le bisogni alcuna causa o forza fuori di sè. Il mondo, cioè l'essere della materia in un cotal modo, è cosa incominciata e caduca. Ora diremo della origine del mondo. — La materia in universale, siccome le piante e le creature animate, ha in sè per natura una o più forze sue proprie, che l'agitano e muovono in diversissime guise continuamente. Le quali forze noi possiamo congetturare ed anche denominare dai loro effetti, ma non conoscere in sè, nè scoprir la natura loro. Nè anche possiamo sapere se quegli effetti, che da noi si riferiscono a una stessa forza, procedono veramente da una o da più, e se per contrario quelle forze che noi significhiamo con diversi nomi, sieno veramente diverse forze, o pure una stessa. Siccome tutto dì nell'uomo con diversi vocaboli si dinota una sola passione o forza: per modo di esempio, l'ambizione, l'amor del piacere e simili, da ciascuna delle quali fonti derivano effetti talora semplicemente diversi, talora eziandio contrari a quei delle altre, sono infatti una medesima passione, cioè l'amor di se stesso, il quale opera in diversi casi diversamente Queste forze adunque, o si debba dire questa forza della materia, movendola, come abbiamo detto, ed agitandola di continuo, forma di essa materia innumerabili creature, cioè la modifica in variatissime guise. Le quali creature, comprendendole tutte insieme, e considerandole siccome distribuite in certi generi e certe specie, e congiunte tra sè con certi ordini e certe tali relazioni che provengono dalla loro natura, si chiamano mondo. Ma imperciocchè la detta forza non cessa mai di operare e di modificare la materia, però quelle creature che

essa continuamente forma, essa altresì le distrugge, formando della materia loro nuove creature, insino a tanto che distruggendosi le creature individue, i generi nondimeno e le specie delle medesime si mantengono, o tutte, o le più, e che gli ordini e le relazioni naturali delle cose non si cangiano o in tutto o nella più parte, si dice durare ancora quel cotal mondo. Ma infiniti mondi, nello spazio infinito della eternità, essendo durati più o men tempo, finalmente sono venuti meno, perdutisi per li continui rivolgimenti della materia, cagionati dalla predetta forza, quei generi e quelle specie, onde essi mondi si componevano, e mancate quelle relazioni e quegli ordini, che li governavano. Nè perciò la materia è venuta meno in qual si sia particella, ma solo sono mancati que' suoi tali modi di essere, succedendo immantinente a ciascuno di loro un altro modo, cioè un altro mondo, di mano in mano.

DELLA FINE DEL MONDO

Questo mondo presente, del quale gli uomini sono parte, cioè a dire l'una delle specie delle quali esso è composto, quanto tempo sia durato fin qui, non si può facilmente dire, come neanche si può conoscere quanto tempo esso sia per durare da questo innanzi. Gli ordini che lo reggono paiono immutabili, e tali sono creduti, perciocchè essi non si mutano se non a poco a poco e con lunghezza incomprensibile di tempo, per modo che le mutazioni non cadono appena sotto il conoscimento, non che sotto i sensi dell' uomo. La quale lunghezza di tempo, quanto che ella si sia, è ciò non ostante menoma per rispetto alla durazione eterna della materia. Vedesi in questo presente mondo un continuo perire degli individui ed un continuo trasformarsi delle cose da una in altra: ma perciocchè la distruzione è compensata continuamente dalla produzione, e i generi si conservano, stimasi che esso mondo non abbia nè sia per avere in sè alcuna causa per la quale possa perire, e che non dimostri alcun segno di caducità. Nondimeno si può pur conoscere il contrario, e ciò da più d'un indizio ma tra gli altri da questo.

[Qui Leopardi immagina, che la terra, per il suo continuo moto di rotazione, appiattendosi sempre più ai poli e rigonfiandosi all' equatore, finisca con l'assumere la forma di un disco, dal quale, con una evoluzione diversa da quella supposta dalla teoria di Kant e Laplace per gli anelli di Saturno, si staccherebbero anelli equatoriali; che poi si frantumerebbero, ed i loro frammenti finirebbero col precipitare nel sole.]

Ora quel cangiamento, che noi sappiamo essere intervenuto e intervenire ogni giorno alla figura della terra, non è dubbio alcuno che per le medesime cause non intervenga somigliantemente a quella di ciascun pianeta. Nè solo a quelli, che a similitudine della terra si aggirano intorno al sole, ma il medesimo senza alcun fallo interviene ancora a quei pianeti, che ogni ragion vuole che si credano essere intorno a ciascuna stella. Per tanto in quel modo che si è divisato della terra, tutti i pianeti in capo di certo tempo, ridotti per se medesimi in pezzi, hanno a precipitare gli uni nel sole, gli altri nelle stelle loro. Nelle quali fiamme manifesto è che non pure alquanti o molti individui, ma universalmente quei generi e quelle specie, che ora si contengono nella terra e nei

pianeti, saranno distrutte insino, per dir così, dalla stirpe. E questo per avventura, o alcuna cosa a ciò somigliante, ebbero nell' animo quei filosofi, così greci come barbari, i quali affermarono dovere alla fine questo presente mondo perire di fuoco. Ma perciocchè noi veggiamo che anche il sole si ruota dintorno al proprio asse, e quindi il medesimo si dèe credere delle stelle, segue che l' uno e le altre in corso di tempo debbano non meno che i pianeti venire in dissoluzione, e le loro fiamme dispergersi nello spazio. In tal guisa adunque il moto circolare delle sfere mondane, il quale è principalissima parte dei presenti ordini naturali, e quasi principio e fonte della conservazione di questo universo, sarà causa altresì della distruzione di esso universo, e dei detti ordini.

Venuti meno i pianeti, la terra, il sole e le stelle, ma non la materia loro, si formeranno di questa nuove creature, distinte in nuovi generi e nuove specie, nasceranno per le forze eterne della materia nuovi ordini delle cose ed un nuovo mondo. Ma le qualità di questo e di quelli, siccome eziandio degl' innumerabili che già furono e degli altri infiniti che poi saranno, non possiamo noi nè pur solamente congetturare.

Questa grandiosa concezione cosmica di LEOPARDI corrisponde a quella esposta da KANT nella sua *Storia naturale generale e teoria del cielo,* per la quale il filosofo di Königsberg, temendo di esser tacciato di epicureismo ateistico, scriveva: « Se l' edificio del mondo, con tutto il suo ordine e la bellezza, è solo un effetto della materia lasciata alle sue leggi di movimento, se la cieca meccanica delle forze della natura si sa svolgere così magnificamente dal chaos e giunge da sè a tale perfezione, allora la prova del divino Creatore, che si trae dalla visione della bellezza del mondo, perde ogni forza, la Natura basta a sè stessa, la reggenza divina non è necessaria, etc. » Questo, che scriveva KANT per la sua teoria celeste, poteva ripetere LEOPARDI per la sua concezione del mondo.

Questo, che egli poteva ripetere della sua concezione *fisica* del mondo, poteva egualmente dirlo per la sua concezione *metafisica,* riguardante le relazioni tra materia e spirito; di cui egli il 26 settembre del 1826 scriveva nello *Zibaldone*: « E' chiaro e noto che l' idea e la voce *spirito* non si può insomma e in conclusione definire altrimenti che *sostanza che non è materia,* giacchè niuna sua qualità positiva possiamo noi nè conoscere, nè nominare, nè anco pure immaginare. Ora il nome e l' idea di materia, idea e nome anch' essa astratta, cioè ch' esprime collettivamente un' infinità di oggetti, tra sè differentissimi in verità (e noi non sappiamo se la materia sia omogenea, e quindi una sola sostanza identica, o vero distinta in elementi, e quindi in altrettante sostanze, di natura ed essenza differentissimi, com' ella è distinta in diversissime forme), l' idea dico ed il nome di materia abbraccia tutto quello che cade o può cader sotto i nostri sensi, tutto quello che noi conosciamo, e che noi possiamo conoscere e concepire; ed essa idea ed esso nome non si può veramente definire che in questo modo, o almeno questa è la definizione che più gli conviene, invece dell' altra de-

dotta dall' enumerazione di certe sue qualità comuni, come divisibilità, larghezza, lunghezza, profondità e simili. Per tanto, definire lo spirito *sostanza che non è materia,* è precisamente lo stesso che definirla *sostanza che non è di quelle che noi conosciamo e possiamo conoscere e concepire,* e questo è quel solo che noi veniamo a dire e a pensare ogni volta che diciamo *spirito,* o che pensiamo a questa idea, la quale non si può, come ho detto, definire altrimenti. Frattanto questo spirito, non essendo altro che quello che abbiam veduto, è stato per lunghissimo spazio di secoli creduto contenere in sè tutta la realtà delle cose; e la materia, cioè quanto noi conosciamo e concepiamo, e quanto possiamo conoscere e concepire, è stato creduto non essere altro che apparenza, sogno, vanità appetto allo spirito. E' impossibile non deplorar la miseria dell' intelletto umano considerando un così fatto delirio. Ma se pensiamo poi che questo delirio si rinnova oggi completamente, e che nel secolo XIX risorge da tutte le parti, e si ristabilisce radicatameute lo spiritualismo, forse anche più spirituale, per dir così, che in addietro; che i filosofi più illuminati della più illuminata nazione moderna, si congratulano di riconoscere per caratteristica di questo secolo, l' essere esso *éminemment religieux,* cioè spiritualista: che può fare un savio altro che disperare compiutamente della *illuminazione* delle menti umane e gridare: o Verità, tu sei sparita dalla terra per sempre, nel momento che gli uomini incominciano a cercarti. »

Più che con lo spirito LEOPARDI identificava la materia con quello, che era per lui il motore del mondo, cioè l'*amor proprio,* l' *amor sui,* che è eguale al *Ding an sich* di KANT: il *Wille* di SCHOPENHAUER, la *sitis* di LUCREZIO, la *tanhâ,* o sete di vita, di SAKYAMUNI; e ne scriveva, il 23 novembre 1821: « L' amor proprio non può, non solo svanire, ma non scemar mai di un menomissimo grado; e si può dire di lui ciò che della materia, che tanta nè più nè meno ve n' ha oggi, e ve n' avrà, quanto al principio del mondo, e che la sua quantità non è mai cresciuta nè scemata di un nulla. »

Da questo poco, che qui si è riportato, e dal molto, che si potrebbe ancora ricordare, risulta evidente la concordanza delle concezioni cosmiche di LEOPARDI con i maggiori risultati delle moderne scienze fisiche e naturali, l' affinità della sua filosofia con la filosofia teoretica, *non la pratica od etica,* di SCHOPENHAUER, e la risonanza che, come egli stesso dichiara, essa trova nelle grandi intuizioni degli antichi sapienti del Mediterraneo e dell' India; che io ho segnalato nelle mie tre Note ricordate al principio di questo scritto; e specialmente nella parte conoscitiva, o teoretica, *non nella pratica,* della Dottrina buddhistica.

Di tale risonanza delle concezioni di LEOPARDI con le antiche intuizioni indiane, specialmente buddhistiche, è stato interprete eloquente l' indologo KARL EUGEN NEUMANN nella sua grande opera di traduzione dei testi buddhistici del canone pâli, specialmente di quelli del *Majjhimanikâyo*

e del *Dîghanikâyo*; per i quali, a proposito delle generazioni, degenerazioni e rigenerazioni cicliche del mondo e del genere umano, quali sono descritte nel *Cakkavattisuttam* e nell' *Aggaññasuttam,* osserva, che esse corrispondono quasi letteralmente a ciò che LEOPARDI, che naturalmente le ignorava, scrive nella sua *Storia del genere umano*, specialmente allora che, parlando del mondo futuro, dice, come « mancherà dalla vita umana ogni valore, ogni rettitudine, così di pensieri come di fatti, e non pure lo studio e la carità, ma il nome stesso delle nazioni e delle patrie sarà spento per ogni dove, recandosi tutti gli uomini, secondo che essi saranno usati di dire, in una sola nazione e patria, come fu da principio, e facendo professione d' amore universale verso tutta la loro specie; ma veramente dissipandosi la stirpe umana in tanti popoli quanti saranno gli uomini. Perciocchè non si proponendo nè patria da dover particolarmente amare, nè strana da odiare, ciascheduno odierà tutti gli altri, amando solo, di tutto il suo genere, se medesimo. » Mentre però LEOPARDI si ferma a quest' ultimo gradino di degenerazione, il vaticinio buddhistico invece, giunto a quest' ultimo punto, piglia le mosse per una nuova rigenerazione ciclica; giacchè, atterriti dalla generale degenerazione e cattiveria, alcuni pochi si ritireranno nelle selve, nei deserti e nelle montagne, a fare vita solitaria e salutare; e questa vita loro gioverà; e mossi dal loro esempio, altri seguiranno la medesima benefica via; ed il mondo sperimenterà altro indirizzo: e così il ciclo ricomincia.

Con ciò siamo passati dalle concezioni fisiche di LEOPARDI a quelle psicologiche e morali; in cui esistono concordanze, ma anche, come ho dianzi già accennato, discordanze con le concezioni antiche e moderne alle sue più affini: quelle del BUDDHA SAKYAMUNI, del sesto secolo avanti CRISTO, e del suo contemporaneo SCHOPENHAUER: perchè, alla pari dell' antico e del moderno, egli vede dominare nel mondo il dolore; ma, mentre quelli ne indicano una via di scampo e di salvezza, nella rassegnazione e nella rinunzia della santità, egli non ne vede alcuna sfuggita, altro che nell' illusione e nell' oblio, risultanti dall' azione e da una più potente affermazione di vita, quasi precorritrice di quella, che NIETZSCHE chiamerà volontà di potenza, *Wille zur Macht.* In tale senso, quindi, si può dire, che il pessimismo di LEOPARDI è più amaro, sconsolato e radicale di quello di SCHOPENHAUER e del BUDDHA.

In contrasto con questa contraddizione tra le premesse teoriche e le conseguenze pratiche del sistema filosofico di LEOPARDI, si può ripetere quel che Helmuth von GLASENAPP ha scritto nel suo libro *Die Weisheit des Buddha*, del 1946; in cui osserva, che il Buddhismo ed il Cristianesimo partendo da principii discordi, anzi opposti, giungono a conclusioni praticheperfettamente concordi. La dottrina del BUDDHA, infatti, insegna non un personale Creatore del mondo, ma una impersonale legge cosmica; non un divino piano di salvazione, che si realizza in un unico corso storico

tra la Creazione ed il Giudizio universale, ma un processo cosmico ciclico senza principio nè fine; nessuna immortalità di anime semplici, immateriali, imperiture, ma un ininterrotto fluire di correnti di fugaci fattori di esistenza, non arrestati dalla morte; nessuna redenzione per grazia divina, ma una estinzione finale: eppure i precetti pratici, morali, del BUDDHA finiscono col trovarsi in perfetto armonia con quelli, esposti dal CRISTO nel *sermone del monte.*

Già il 7 novembre del 1823 LEOPARDI scriveva nello *Zibaldone*: « Quando ei vivendo, non vive; allora solo l' uomo è pienamente felice. » Questo pensiero può ricordare quello famoso della grande santa TERESA di Avila: « *Vivo sin vivir en mi, Y tan alta vida espero, Que muero porque no muero.* » Ma santa TERESA moriva nella vita terrena, perchè sperava nella vita celeste; e LEOPARDI nello stesso *Zibaldone* dice, che è proprio la speranza, che distingue l' ignorante dal savio; il quale non spera più nulla. Ed infatti il 23 marzo 1829, a proposito del verso del PETRARCA, *Mille piacer non vagliono un tormento,* scriveva: « Questo verso racchiude una sentenza capitale contro tutta la vita umana, e contro chi consente a vivere, cioè tutti i viventi. » Ed il 16 settembre 1832 aggiungeva: « Due verità, che gli uomini veramente non crederanno mai: l' una di non saper nulla, l' altra di non esser nulla. Aggiungi la terza, che ha molta dipendenza dalla seconda: di non aver nulla a sperare dopo la morte. »

Questa sconsolata e disperata conclusione delle concezioni cosmiche di LEOPARDI è ciò che le differisce, nell' applicazione pratica od etica, come o già detto dianzi, dalle affini concezioni di SCHOPENHAUER e di SAKYAMUNI.

Il filosofo tedesco, infatti, alla fine del primo volume del *Mondo come volontà e rappresentazione,* descrivendo la beatitudine dei santi, che hanno completamente rinnegato la volontà di vivere, scrive: « Quel che resta, dopo l' intera cessazione della volontà, per coloro, che sono ancor pieni, è certamente nulla. Ma anche, viceversa, per coloro , nei quali la volontà si è rivoltata e rinnegata, questo nostro tanto reale mondo, con tutti i suoi soli e le sue galassie, è—nulla. » Ed i discepoli dell' antico sapiente indiano, del sublime Svegliato, i quali hanno, con l' estinzione della sete, raggiunto la santità del nirvâna, proclamano concordemente: « Io non bramo la morte, non bramo la vita: pensoso e sapiente aspetto la fine di questo corpo caduco, come il mercenario la mercede: *nâbhinandâmi maranam nâbhinandâmi jivitam...* » Il che trova un' assai singolare eco nel verso X, 47 di quel tristanzuoli di MARZIALE: *Summum nec metuas, diem nec optes.* E similmente, con ampiezza imperiale, MARCO AURELIO, nel ilbro III, 5, dei suoi *Ricordi,* scritti sotto la sua tenda di guerra, in Carnunto, esortava sè stesso ad essere « dotato d' animo virile, un uomo venerabile per età, esperto nell' amministrazione dello stato, e romano e imperatore; un uomo che ha disciplinato sè stesso. ed è disposto ad uscir di vita, come di altro

non attenda che il segnale della ritirata. » Ma questa indifferente pacatezza, rispetto alla vita ed alla morte, non c' è in LEOPARDI.

Egli, infatti, vede solo nelle care illusioni della giovinezza, dell' amore, dell' azione, il balsamo alle ferite del dolore e del male del mondo. Il qual male e dolore del mondo egli descrisse, con impareggiata potenza d' arte, il 22 aprile del 1826, in quelle pagine dello *Zibaldone,* in cui è anche la famosa descrizione del giardino in istato di *souffrance*; che pare quasi un preludio alla maestosa sinfonia della odorata *Ginestra*, destinata anch' essa a soccombere alla crudel possanza del sotterraneo foco, ed a piegare sotto il fascio mortal non renitente il suo capo innocente. Anche la ginestra, anche il giardino ridente debbono soggiacere al dolore ed al male del mondo. « Tutto è male; cioè tutto quello che è, è male; che ciascuna cosa esista è un male; l' esistenza è un male e ordinata al male; il fine dell' universo è il male; l' ordine e lo stato, le leggi, l' ordinamento naturale dell' universo non sono altro che male, nè diretti ad altro che al male. Non v' è altro bene che il non essere: non v' ha altro di buono che quel che non è; le cose che non son cose: tutte le cose son cattive. Il tutto esistente, il complesso dei tanti mondi che esistono, l' universo; non è che un neo, un bruscolo in metafisica... il tutto esistente è infinitamente piccolo a paragone della infinità vera, per dir così, del non esistente, del nulla... Non gli uomini solamente, ma il genere umano fu e sarà sempre infelice di necessità. Non il genere umano solamente, ma tutti gli animali. Non gli animali soltanto, ma tutti gli esseri al loro modo. Non gli individui, ma le specie, i regni, i globi, i sistemi, i mondi... e se questi esseri sentono o, vogliamo dire, sentissero, certo è, che il non essere sarebbe per loro assai meglio che l' essere... Si potrebbe esporre e sviluppare questo sistema iu qualche frammento, che si supponesse di un filosofo antico, *indiano.* » Dunque LEOPARDI aveva perfettamente intuito, che il suo sistema era affine agli antichi sistemi filosofici indiani; ma, non conoscendo quelli abbastanza, aveva già attribuito il suo frammento a *Stratone da Lampsaco.*

Inoltre, egli aveva giustamente notato, il 18 maggio del 1821, che l' ateismo e l' incredulità religiosa erano stati provocati dalla religione giudaica e dalle sue derivate, la cristiana e la maomettana; ed aveva aggiunto, il 13 ottobre dello stesso anno, che invece dall' Oriente erano venute le prime tracce, anzi quasi l' intero sistema dell' amore universale, per tutti gli esseri viventi.

L' affinità, dal LEOPARDI stesso indicata, delle sue concezioni filosofiche con quelle degli antichi filosofi indiani, e quella, che noi possiamo indicare, con la filosofia di SCHOPENHAUER, offre, però, questa differenza: che LEOPARDI vede il dominio *assoluto* del male e del dolore nel mondo; mentre quelli insieme col dolore vi scorgono anche il piacere, se anche condizionato secondo la sentenza di PETRARCA: *mille piacer non valgono un tormento.*

Inoltre, come ho già detto, quelli hanno visto la liberazione dal dolore nella via della santità, nella abnegazione della volontà di vivere, nell'estinzione della *tanhâ*, della sete di esistenza. Invece LEOPARDI, per superare il male ed il dolore del mondo, ne cerca il mascheramento e l'oblio in una più energica manifestazione dei fattori della vita stessa: preludendo così, in modo singolarissimo, alla concezione di NIETZSCHE del potenziamento della volontà.

Per specificare ancor meglio questo che dico, ricordo quel che ho scritto in alcune delle mie Note precedenti; che, cioè, nella dottrina buddhistica del SAKYAMUNI la *tanhâ*, o *sete* di vita, animatrice dell'universo, è differenziata in tre manifestazioni principali: la sete dell'amore o sesso, *kâmatanhâ;* la sete del divenire o dell'essere, *bhavatanhâ;* e la sete del benessere o superessere, *vibhavatanhâ*. Orbene il LEOPARDI cerca appunto in queste tre manifestazioni il superamento e l'oblio del dolore e del mondo.

Anzitutto nell'amore: come lo cantò nel *Pensiero dominante*, nel 1831:

> Pregio non ha, non ha ragion la vita
> Se non per lui, per lui ch'all'uomo è tutto;
> Sola discolpa al fato,
> Che noi mortali in terra
> Pose a tanto patir senz'altro frutto;
> Solo per cui talvolta,
> Non alla gente stolta, al cor non vile
> La vita della morte é più gentile.

E lo ricantò l'anno seguente, in *Amore e morte:*

> Fratelli, a un tempo stesso, Amore e Morte
> Ingenerò la sorte.
> Cose quaggiù sì belle
> Altre il mondo non ha, non han le stelle.
> Nasce dall'uno il bene,
> Nasce il piacer maggiore,
> Che per lo mar dell'essere si trova;
> L'altra ogni gran dolore,
> Ogni gran male annulla.

Poi nella giovinezza, la più viva e felice manifestazione di tutta la vita, nel *Tramonto della luna*, del 1836:

> Ma la vita mortal, poi che la bella
> Giovinezza sparì, non si colora
> D'altra luce giammai, nè d'altra aurora.
> Vedova è insino al fine; ed alla notte,

Che l' altre etadi oscura,
Segno poser gli Dei la sepoltura.

Ed infine nella strenuità della vita attiva, vigorosa e pericolosa, quale la cantò nell' ode pindarica *A un vincitore nel pallone,* del 1821, e quale se ne trova un' eco nel *Fanum Vacunae* del Pascoli: *Vita vis, homo, est: nunc militandum: mortuus vacabis!:*

Nostra vita a che val? Solo a spregiarla:
Beata allor che ne' perigli avvolta,
Se stessa obblia, nè delle putri e lente
Ore il danno misura e il flutto ascolta;
Beata allor che il piede
Spinto al varco leteo, più grata riede.

Queste, dette in breve, sono, a parer mio, le concezioni cosmiche di Leopardi: con le loro parti di bianco e di nero.

Sull' estenzione del teorema di Lüroth dall' S_1 complesso ad un S_1 ipercomplesso

Nota del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 8 novembre 1952)

Sunto. — Si estende il teorema di Luroth [e relativa estensione, sulle serie algebriche, r volte infinite], di gruppi di n punti di un S_1 proiettivo, ad un S_1 proiettivo *ipercomplesso* cioè legato ad una *qualunque algebra A, di ordine* m, *dotata di modulo e commutativa.*

1. Caso dell' algebra A irriducibile.

Sia J_m^1 una serie, unidimensionale rispetto all' algebra A, di gruppi algebrici G_m dell' S_1 proiettivo legato ad A, di equazione

$$a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}\mu+\ldots+a_{m-1}\lambda\mu^{m-1}+a_m\mu^m=0 \tag{1}$$

con i coefficienti dati da:

$$a_0=f_0(\eta\,,\pi),\ldots,a_m=f_m(\eta\,,\pi), \tag{2}$$

essendo $f_0(\eta, \pi), .. f_m(\eta, \pi)$ funzioni omogenee dello stesso grado nelle due variabili η, π in A, ed indicando con (λ, μ) le coordinate omogenee del punto variabile in detto S_1. Supponiamo, inoltre, che la serie algebrica J_m^1 goda delle seguenti proprietà:

1° Non abbia punti base.

2° Fissato un punto dell' S_1 ipercomplesso esiste un solo gruppo della serie contenente tale punto.

3° Il gruppo generico della serie sia costituito da m punti distinti.

Vogliamo dimostrare che: *la serie* J_m^1 *è un' involuzione* I_m^1.

Si tratta quindi di dimostrare che detta serie è rappresentabile con con un' equazione del tipo

$$b_0F_0(\lambda, \mu)+b_1F_1(\lambda, \mu)=0. \tag{3}$$

Fissato in S_1 un punto $P'(\eta', \pi')$ l' equazione del gruppo della J_m^1 è data, per le posizioni fatte, da:

$$f_0(\eta', \pi')\lambda^m+f_1(\eta', \pi')\lambda^{m-1}\mu+...+f_m(\eta', \pi')\mu^m=0. \tag{4}$$

Indicati con $a_0', a_1', ..., a_m'$ i coefficenti della (4), deve essere la matrice

$$\left\| \mu' a_0', \mu' a_1', \dots, \mu' a_m' \right\| \tag{5}$$

composta mediante le *matrici degli elementi* $a_0, a_1, .., a_m$ dell' algebra A (non si specifica se si tratta di matrici destre o sinistre perchè si è supposta l' algebra A commutativa) di caratteristica massima, cioè n. Ciò perchè se tale caratteristica fosse $<n$, la (4) sarebbe l' equazione di un t-gruppo con $t>1$, e quindi non di un gruppo.

Indicato con $u_1, u_2, .., u_n$, un sistema di unità di A, con la condizione che la prima unità u_1 sia il modulo dell' algebra, posto

$$a_j' = a_1^j u_1 + ... a_n^j u_n \qquad (j=1, 2, ..., m), \tag{6}$$

la condizione che la matrice (5) sia di caratteristica massima porta di conseguenza che uno almeno degli m numeri complessi che nelle (6) rappresentano i coefficenti del modulo u_1 dell' algebra A, deve essere non nullo. Infatti se tali coefficenti fossero tutti nulli ogni elemento $a_0', a_1', .., a_m'$ sarebbe una combinazione lineare delle sole unità $u_2, .. u_n$ e quindi apparterrebbe alla sotto algebra eccezionale di A, che, per la supposta irriduci-

bilità di A, è di ordine massimo $n-1$, ed ha per unità le $n-1$ unità di A, escludendo il modulo, cioè le unità $u_2, .., u_n$. L' appartenenza delle a_j' alla sotto algebra eccezionale, porta di conseguenza che la matrice sarebbe di caratteristica $<n$. Sicchè uno almeno dei coefficienti a_j' è non nullo nè divisore dello zero. Sia tale, per es., il cofficente a_0'. Esiste allora l' inverso $a_0'^{-1}$. Moltiplicando la (4) per tale inverso, l' equazione del gruppo della serie J_m^1, contenente $P'(\eta', \pi')$, si scrive nella forma

$$\lambda^m + \frac{f_1(\eta'\pi')}{f_0(\eta'\pi')}\lambda^{m-1}\mu + \ldots + \frac{f_m(\eta'\pi')}{f_0(\eta'\pi')}\mu^m = 0 \tag{4'}$$

Consideriamo ora tutto il gruppo di J_m^1 contenente $P'(\eta'\pi')$ e siano $P_1'(\eta_1'\pi_1'), \ldots, P_n(\eta_n'\pi_n)$ i punti che lo costituiscono.

Quando nella (4') si vanno a sostituire al posto di $\eta'\pi'$; volta a volta, le coordinate di tali n punti, siccome si deve sempre ottenere l' equazione dello stesso gruppo, i coefficenti devono risultare sempre proporzionali a quelli della (4'). Ma il primo coefficiente di questa è il modulo dell' algebra di conseguenza ciascuno degli altri coefficienti per tali sostituzioni deve rimanere invariato. Ora fra questi coefficienti ve ne potranno essere di quelli che si riducono a delle costanti rispetto alle $\eta'\pi'$, ma ciò non potrà accadere per tutti, perchè altrimenti i gruppi della J_m^1 si ridurrebbero ad un solo contro l' ipotesi che la J sia unidimensionale rispetto all' algebra A. supposto che un coefficente non costante sia

$$\frac{f_1(\eta'\pi')}{f_0(\eta'\pi')}$$

si dovrà avere

$$\frac{f_1(\eta_1'\pi_1')}{f_0(\eta_1'\pi_1')} = \frac{f_1(\eta_2'\pi_2')}{f_0(\eta_2'\pi_2')} = \frac{f_1(\eta_n'\pi_n')}{f_0(\eta_n'\pi_n')} \tag{7}$$

Indicando con t' il valore comune di questi rapporti, risulta che gli n punti $P_j'(\eta_j'\pi_j')$, fra i quali c' è $P'(\eta'\pi')$, soddisfacendo all' equazione

$$t'f_0(\eta, \pi) - f_1(\eta, \pi) = 0. \tag{8}$$

Sicchè il gruppo determinato dal fissato pnnto P' nella J_m^1, varia, al variare di P' nella involuzione dell' S_1 ipercomplesso di equazione

$$tf_0(\eta, \pi) - f_1(\eta, \pi) = 0 \tag{9}$$

e quindi detta serie coincide con la involuzione I_m^1 di equazione (9), ottenuta combinando linearmente le equazioni $f_0(\eta, \pi) = 0$ e $f_1(\eta, \pi) = 0$ secondo i due elementi dell' algebra t e u_1 formanti una coppia di caratteristica massima, essendo uno degli elementi l' opposto del modulo u_1 e quindi a determinante non nullo.

Il teorema è pertanto dimostrato.

Nota.

Si noti ora che: *il teorema è vero anche se non si mette la condizione I^a*, cioè che la serie non abbia punti base. Infatti supponiamo che la serie abbia dei punti fissi e sia tale che non considerando tali punti fissi resti una serie che soddisfi alle tre condizioni del teorema dimostrato. Tale serie rimanente è pertanto una involuzione, ma allora sarà anche un' involuzione la serie che si ottiene aggiungendo a ciascun gruppo della serie quei punti fissi.

2. Caso dell' algebra A riducibile.

Se l' algebra A è riducibile, somma diretta di q algebre irriducibili $A_1, .., A_q$, queste saranno commutative e dotate di modulo. *Ogni equazione algebrica in* A *è il prodotto di* q *equazioni algebriche rispettivamente in* $A_1, .., A_q$ e quindi ogni gruppo G_m dell' S_1 legato ad A risponde a q determinati gruppi algebrici $G_{m_1}, .., G_{m_q}$ degli S_1 legati ad $A_1, .., A_q$. *Ogni involuzione* I_m *dell'* S_1 *legato ad* A *risponde a* q *determinate involuzioni negli* S_1 *legati ad* $A_1, .., A_q$, e quindi avendo già dimostrato il teorema per il caso irriducibile, ne segue senz' altro la validità per il caso riducibile.

3. Generalizzazione del teorema precedente.

Il teorema di Luroth sia nel caso dell' algebra A riducibile, restando sempre nell' ipotesi che l' algebra A sia commutativa, dotata di modulo e definita nel corpo complesso, si generalizza, in modo analogo al caso dell' S_1 complesso, nel seguente

Teorema: *Sia* J_m^r *una totalità algebrica, rivolte infinita rispetto all' algebra* A, *di gruppi di punti dell'* S_1 *proie'tivo 'egato ad A, che soddisfi alle seguenti condizioni.*

1° *Non abbia punti fissi.*

2° *Sia formata di gruppi a punti generalmente distinti.*

3° *Contenga un solo gruppo che passi per r punti della retta, genericamente assegnati.*

Tale J_m^r *è una involuzione* I_m^r.

SULLE RAPPRESENTAZIONI COMPLESSE DELL' S_2 TRIPOTENZIALE

Nota della dott. **Elda Cirillo**, *presentata dal socio* **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 8 novembre 1952)

Sunto. — Si fa la prima rappresentazione dell' S_2 tripotenziale; da questa si passa poi ad una seconda rappresentazione e si caratterizza una varietà da cui la Riemanniana dell' S_2 tripotenziale si può ottenere per proiezione.

§ 1. — *I e II rappr. dell' S_2 tripotenziale.*

Dato l' S_2 tripotenziale, per ogni terna (x,y,z) assegnata si ottiene, combinando linearmente le righe delle matrice:

$$(1) \qquad \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 & z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & x_1 & x_2 & 0 & y_1 & y_2 & 0 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & y_1 & 0 & 0 & z_1 \end{Vmatrix}$$

un piano che, al variare della terna, varia descrivendo nell' S_8 complesso proiettivo (i cui punti hanno per coordinate le righe della (1)) un insieme che, dipendendo dai parametri $\frac{x_1}{z_1}\,\frac{y_1}{z_1}\,\frac{x_2}{z_2}\,\frac{y_2}{z_2}\,\frac{x_3}{z_3}\,\frac{y_3}{z_3}$ è un sei-complesso, che è una congruenza di ordine 1 (I^a Rappresentazione dell' S_2 tripotenziale). Per una seconda rappresentazione dell' S_2 tripotenziale in ordine ad un metodo generale, riguardante uno spazio legato ad un' algebra*, considerando la matrice (1) ed i minori di ordine 3 estratti da essa, si hanno le coordinate grassmaniane del piano nell' S_8 corrispondente al punto (x , y , z) dell' S_2 tripotenziale.

Di questi minori 29 sono diversi da zero. Poniamo:

$$(2) \qquad \begin{cases} \sigma_1 = x_1^3 \\ \sigma_2 = x_1^2\, y_1 \\ \sigma_3 = x_1^2\, z_1 \\ \sigma_4 = x_1\,(x_2\, y_1 - x_1\, y_2) \\ \sigma_5 = x_1\, y_1^2 \\ \sigma_6 = x_1\,(x_1\, z_2 - x_2\, z_1) \end{cases}$$

---

*) N. SPAMPINATO. *Lezioni di Geometria Superiore*, Vol. VI, Parte III, Cap. III, § 1 (Pironti, Napoli).

$$
(2) \quad \begin{cases}
\sigma_7 = x_1\, y_1\, z_1 \\
\sigma_8 = x_2\, (x_2 \quad {}_1 - x_1\, y_2) - x_1\, (x_3\, y_1 - x_1\, y_3) \\
\sigma_9 = x_1\, z_1^2 \\
\sigma_{10} = x_2\, (x_2\, z_1 - x_1\, z_2) - x_1\, (x_3\, z_1 - x_1\, z_3) \\
\sigma_{11} = y_1\, (x_2\, y_1 - x_1\, y_2) \\
\sigma_{12} = z_1\, (x_2\, y_1 - x_1\, y_2) \\
\sigma_{13} = y_1\, (x_1\, z_2 - z_1\, x_2) \\
\sigma_{14} = x_1\, (y_2\, z_1 - y_1\, z_2) \\
\sigma_{15} = x_2\, (y_2\, z_1 - y_1\, z_2) - x_1\, (y_3\, z_1 - y_1\, z_3) \\
\sigma_{16} = z_1\, (x_2\, z_1 - x_1\, z_2) \\
\sigma_{17} = y_2\, (x_2\, y_1 - x_1\, y_2) + y_1\, (x_3\, y_1 - x_1\, y_3) \\
\sigma_{18} = y_1\, (x_3\, z_1 - x_1\, z_3) - y_2\, (x_2\, z_1 - x_1\, z_2) \\
\sigma_{19} = z_2\, (x_2\, y_1 - x_1\, y_2) - z_1\, (x_3\, y_1 - x_1\, y_3) \\
\sigma_{20} = x_3\, (y_2\, z_1 - y_1\, z_2) - y_3\, (x_2\, z_1 - x_1\, z_2) + z_3\, (x_2\, y_1 - x_1\, y_2) \\
\sigma_{21} = z_2\, (x_2\, z_1 - x_1\, z_2) - z_1\, (x_3\, z_1 - x_1\, z_3) \\
\sigma_{22} = y_1^3 \\
\sigma_{23} = y_1^2\, z_1 \\
\sigma_{24} = y_1\, (y_2\, z_1 - y_1\, z_2) \\
\sigma_{25} = y_1\, z_1^2 \\
\sigma_{26} = y_2\, (y_2\, z_1 - y_1\, z_2) - y_1\, (y_3\, z_1 - y_1\, z_3) \\
\sigma_{27} = z_1\, (y_1\, z_2 - y_2\, z_1) \\
\sigma_{28} = z_2\, (y_2\, z_1 - y_1\, z_2) - z_1\, (y_3\, z_1 - y_1\, z_3) \\
\sigma_{29} = z_1^3
\end{cases}
$$

Dato un punto dell' S_2 tripotenziale invece di considerare il piano della congruenza da esso determinato, consideriamo il punto intersezione di detto piano con l' S_6 di S_8 di equazioni $z_2 = 0 \;\; z_3 = 0$.

Le equazioni parametriche della varietà rappresentazione dell' S_2 tripotenziale si ottengono da quelle con i 9 parametri sovrabbondanti ponendo $z_2 = 0 \;\; z_3 = 0$; si hanno così le eq. parametriche con i 7 parametri omogenei $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1$.

Combinando linearmente le eq. parametriche ed uguagliando a zero, cioè studiando le sezioni iperpiane della nostra varietà, si ha un' eq. di III° grado nei parametri omogenei.

Tale eq. rappresenterà una ipersuperficie cubica nell' S_6 suddetto. Al variare della sezione iperpiana avremo un sistema lineare ∞^{28}, semplice, di ipersuperficie cubiche $\{F_5^3\}$ che rappresenta una V_6 razionale di S_{28}.

§ 2 *Caratterizzazione del sistema* $\{F_5^3\}$ *e ordine della varietà* V_6.

Si dimostra che *il sistema lineare* $\{F_5^3\}$ è *caratterizzato dalle seguenti proprietà:*

1) *ammette un S_3^* base semplice,*

2) *ammette una retta base doppia, dentro tale S_3^* base semplice, la* $A_3\,A_6$.

Per stabilire l'ordine della varietà, occorre trovare il grado del sistema $\{F_5^3\}$ rappresentativo di detta varietà, intendendo per grado di un sistema lineare di S_r di ipersuperficie, il numero di punti intersezione di ripersuperfici del sistema, fuori dell'eventuale varietà base del sistema stesso. Consideriamo quindi il sistema ∞^{28} di ipersuperficie dell'S_6 avente le equazioni (2).

Prendiamo 5 ipersuperficie di questo sistema $V_5^{3(1)} \dots V_5^{3(5)}$ e vediamo in che cosa esse si intersecano. Consideriamo le prime due $V_5^{3(1)}$ e $V_5^{3(2)}$ esse, applicando il teorema di Grassman si intersecano in una V_4^9 che contiene S_3^* semplice e la $A_3\,A_6$ contata quattro volte. Intersecando ora la V_4^9 con la $V^{3(3)}$ si ha una V_3^{27} (che contiene S_3^* semplice e la $A_3\,A_6$ contata 8 volte) la quale V_3^{27} si spezza nell'S_6^* semplice base ed in una V_6^{26} avente la retta base $A_3\,A_6$ con molteplicità 7. Prima di intersecare la V_3^{27} con la $V_5^{3(4)}$ bisogna vedere in che cosa la V_3^{26} seca l'S_3^* base semplice. Per questo occorre intersecare le tre V_5^3 che danno la V_3^{26} con un iperpiano genericamente fissato S'_5 passante per S_3^* e considerare dentro questo S'_5 le tre intersezioni $V_4^{3(1)}$ $V_4^{3(2)}$ $V_4^{3(3)}$ con le tre ipersuperficie già considerate e vedere come s'intersecano tra loro queste tre V_4.

La $V_4^{3(1)}$ e $V_4^{3(2)}$ danno una V_3^9 avente l'S_3^* semplice e la $A_3\,A_6$ 4pla che si spezza in S_3^* semplice ed in una V_3^8 avente la $A_3\,A_6$ tripla. Tale V_3^8 con la $V_4^{3(3)}$ ci dà una V_2^{23} avente l'S_3^* semplice e la $A_3\,A_6$ sestupla.

Avendo tenuto conto che le tre V_4 ceme le tre V_5 contengono l'S_3^* semplice e la retta $A_3\,A_6$ come doppia, abbiamo trovato che esse avranno in comune una superficie V_3^{23} (comune alle tre V_5) con detto iperpiano S'_5. Cioè, in altri termini, un iperpiano passante per S_3^* seca la V_3^{26} (di cui sopra) fuori dell'S_3^*, anzicchè in una V_2^{26}, in una V_2^{23} avente la retta $A_3\,A_6$ come 5pla. In conclusione la V_5^{26} avrà in S_3^* una V_2^3 che, sommata alla V_2^{23} ci dà l'intersezione V_2^{26} della V_3^{26} con l'iperpiano considerato. Facendo variare S'_5 nella stella di iperpiani di vertice S_3^*, la sezione con la V_3^{26} si spezza sempre nella cubica fissa V_2^3 che sta nell'S_3^* ed in una V_2^{23} variabile. Ciò che ci interessa mettere in evidenza è che la V_3^{26} intersezione delle prime tre V_5^3 ha nell'S_3^* una cubica. Si osservi che la retta $A_3\,A_6$ essendo 5pla per la V_2^{23} e dovendo essere 7pla per la V_3^{26} sarà semplice per la V_2^3 perchè deve essere 7pla per la sezione complessiva con l'iperpiano. Secando la V_3^{26} con la $V_5^{3(4)}$ si ottiene una superficie V_2^{78} che deve contenere la V_2^3 perchè tale cubica sta nell'S_3^* per cui passa la $V_5^{3(4)}$ e quindi tale V_2^{78} si spezza nella V_2^3 e nella V_2^{75}. Conclusione: *l'intersezione delle prime quattro V_5^3 oltre l'S_3^* che hanno in comune, è*

una superficie V_2^{75}. Prima di intersecare la V_2^{75} con la quinta ipersuperficie $V_5^{3(5)}$ bisogna vedere che cosa la V_2^{75} ha dentro l' S_3^*. A tal fine consideriamo, come sopra, un iperpiano generico S'_5 passante per S_3^* ed intersechiamo con esso le prime quattro V_5^3 considerate.

Avremo in questo S'_5 quattro ipersuperficie $V_4^{3(1)}, \dots, V_4^{3(4)}$ che si intersecano in una V_1^{59}.

Un iperpiano generico S'_5 passante per S_3^* seca la V_2^{75} fuori dell' S_3^* in una curva V_1^{16} quindi la V_1^{225} (sezione della V_2^{75} con la $V_5^{3(5)}$) poichè la V_1^{16} è nell' S_3^* che è nelle $V_5^{3(5)}$ si spezzerà nella V_1^{16} ed in una V_1^{209}.

Conclusione: *le prime 5 ipersuperficie* $V_5^{3(1)} \dots V_5^{3(5)}$ *si secano, fuori dell' S_3^* in una* V_1^{209}.

Per trovare il grado del sistema $\{F_5^3\}$ bisogna con una sesta ipersup. $V_5^{4(6)}$ secare la V_1^{209}, ma prima si deve sapere quali punti la V_1^{209} ha nell' S_3^* e fra questi vedere se ve ne sono sulla retta doppia $A_3 A_6$.

Per questo si vede prima quali punti la V_1^{209} ha nell' S_3^*, poi quali ha sulla retta $A_3 A_6$, dopo di che si può dire quanti ne ha nell' S_3^* che non stiano sulla retta $A_3 A_6$.

A tal fine bisogna considerare un iperpiano generico S'_5 passante per S_3^* ed intersecare con esso le 5 ipersuperficie che ci danno la V_1^{209} e vedere come si intersecano fuori dell' S^*_3. Analogamente si deve considerare un iperpiano non più generico S_5 passante per la retta doppia $A_3 A_6$, intersecare le 5 ipersup. di cui sopra e vedere come si intersecano fuori della retta $A_3 A_6$.

Tralasciando i calcoli si può dire che la V_1^{299} ha in comune con questo S_5, fuori della retta $A_3 A_6$ 130 punti cioè la varietà V_1^{209}, che deve essere secata in 209 punti, deve avere sulla retta $A_3 A_6$ 79 punti che diremo $D_1 D_2 \dots D_{79}$, mentre si dimostra che si deve appoggiare all' S_3^* base in 84 punti $G_1 G_2 \dots G_{84}$.

Ora dobbiamo ancora secare la V_1^{209} con la $V_5^{3(6)}$ tenendo presente quanto ultimamente trovato, cioè che la V_1^{209} ha nell' S_3^* base semplice 44 punti di cui 79 sulla retta doppia $A_3 A_6$. Secando ora la V_1^{209} con la $V_5^{3(6)}$ si ha una V_0^{627} che si spezza così:

$$V_0^{627} = 2D_1 + 2D_2 + \dots 2D_{79} + G_{80} + G_{81} + G_{82} + G_{83} + G_{84} + V_0^{464}.$$

Conclusione: *la varietà V_6 di S_{28} è di ordine 464.* E' una V_6^{464} dell' S_{28} da cui, per proiezione, si ha la Riemanniana, II^a^ rappresentazione dell' S_2 tripotenziale.

NOZIONI INTRODUTTIVE ALLA TEORIA DELLE IPERSUPERFICIE ALGEBRICHE DI INDICE n DELL' S_r PROIETTIVO COMPLESSO

Nota X del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 8 novembre 1952)

Sunto. — Si dimostra il teorema fondamentale relativo alla successione di varietà ridotte di una falda t-dimensionale dell'S_r proiettivo complesso.

59. *Teorema fondamentale relativo alle varietà ridotte di una falda* t-*dimensionale.*

Sostituendo nelle equazioni (Nota VIII)

$$(xxx) \qquad x_j = f_{js_0}(z_i) + f_{js_0+1}(z_i) + f_{js_0+2}(z_i) + \ldots$$

della falda t-dimensionale ρ_t, le z_i coordinate di un punto dell' S_t euclideo complesso, variabile in una retta r della stella di vertice $z_1 = .. = z_t = 0$, date da

$$(r) \qquad z_1 = h_1\lambda \;,\quad {}_2 = h_2\lambda, \ldots, z_t = h_t\lambda,$$

si hanno le equazioni del ramo naturale g_r di ρ_t rispondente alla retta r equazioni, che dividendo per ρ^{s_0}, si riducono a

$$(g_r) \qquad x_j = f_{js_0}(h_i)\lambda + f_{js_0}(h_i)\lambda^2 + \ldots$$

La m-ma ridotta della falda con $m >$ dell' *esponente all' origine* s_0, di equazioni parametriche

$$(R_m) \qquad x_r = f_{js_0}(z_i) + \ldots + f_{jm}(z_i)$$

è la varietà rappresentata in S_t dal sistema lineare ∞^r $(V_{t-1}{}^m)$ di equazione

$$(V_{t-1}) \qquad \sum_j^{1,\ldots r+1} \mu_j(f_{js_0}(z_i) + \ldots + f_{s_m}(z_i)) = 0.$$

Questo sistema, nel caso generico, è semplice, con un punto base di multiplicità s_0 nell' origine $0\,(0, .., 0)$, e quindi è di grado $m^t - s_0{}^t$. La m-ma ridotta R_m è quindi, nel caso generico, una V_t di ordine $m^t - s_0{}^t$. Alla retta r di S_t, corrisponde sulla V_t la curva c^{m-s_0} di equazioni parametriche

$$(c_r{}^m) \qquad x_j = f_{js_0}(h_i) + \ldots + f_{sm}(h_i)\lambda^{m-s_0}.$$

Tale curva è, quindi, la m-ma ridotta del ramo naturale g_r della falda di equazioni (g_r).

L' origine di (g_r) è il punto $P\ [f_{js}(h_i)]$, punto che appartiene alla curva $c_r^{m-s_0}$, rispondente al valore $\lambda=0$ del parametro λ. Le equazioni della tangente 1 alla curva c^m nel punto P, sono:

$$(1) \qquad x_j=f_{is_0}(h_i)+f_{js_0+1}(h_i)\lambda.$$

Essendo queste equazioni indipendenti dall' indice m, tutte le curve c_r^m delle ridotte V_t, rispondenti alla stessa retta r della stella di centro $O\ (0,..,0)$, hanno nel punto P la stessa retta tangente.

Si osservi ora che il punto P appartiene all' origine O_h della falda, di equazioni

$$(O_h) \qquad x_j=f_{js_0}(z_i),$$

e che variando r nella stella di centro $O\ (0,..,0)$ la tangente t alla curva c_r^{m-0} in P varierà con la retta r, mentre P descrive l' origine O_h, ma per un fissato punto T di O_h, non varia rispondente ad una fissata retta r della stella; non varia qualunque sia la ridotta. E quindi la successione delle ridotte è costituita da varietà, passanti tutte per l' origine O_h e le ∞^{t-1} curve generatrici di ogni ridotta V_t rispondenti a dette rette r in ciascun punto dell' origine O_h (che *nel caso generico* è un varietà direttrice comune $V_{t-1}s_0^{t-1}$) hanno tutta la stessa tangente.

Si ha perciò indicando con η l' esponente all' origine s_0, il

TEOREMA FONDAMENTALE:

Una generica falda t-*dimensionate* ρ_t *dell'* S_r *proiettivo complesso, con* $t<r$, *avente l' esponente all' origine* η *ha come origine una vavietà razionale* V_{t-1}, *di ordine* η^{t-1}, *e come* m-ma *ridotta con* $m>n$, *una varietà razionale di dimensione* t *e di ordine* $m^t-\eta^t$, *con* ∞^{t-1} *curve razionali, generatrici, di ordine* $m-n$, *e con una varietà* V_{t-1} *direttrice nell' origine della falda. Tutte le varietà ridotte si toccano in ogni punto* T *della comune* V_{t-1}, *e le relative curve generatrici, uscenti da* T, *hanno tutte in* T *la stessa tangente, coincidente con la retta generatrice della* $(\eta+1)$-ma *ridotta uscente da* T.

Si noti che *per* $\eta=0$ l' origine è un punto, la prima ridotta è un S_t' e la m-ma ridotta, con $m>1$, una V_t, di ordine m^t, avente nel punto origine un punto semplice, con lo spazio tangente fisso, coincidente con l' S_t prima ridotta, e con ∞^{t-1} curve razionali generatrici, di ordine m, passanti per l' origine ed aventi nell' origine tutte la stessa tangente (appartenente ad S_t').

Determinazione dei gruppi d'ordine finito relativamente complementati

Nota del dott. **Giovanni Zacher**, *presentata dal socio* **Guido Zappa**

(Adunanza del dì 8 novembre 1952)

Sunto. – Si caratterizzano i gruppi d'ordine finito relativamente complementato.

In questa nota si determinano i gruppi finiti G il cui reticolo $L(G)$ dei sottogruppi è relativamente complementato [1]).

Il teorema principale è il seguente: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo d'ordine finito sia relativamente complementato è che G sia un t-gruppo* [2]) *con i sottogruppi di* Sylow *abeliani elementari* [3]).

Alla fine, sfruttando le considerazioni svolte, si indica il modo di costruire un gruppo relativamente complementato di dato ordine finito g.

1) Per facilitare la lettura della presente nota premettiamo alcune definizioni tratte dalla teoria dei reticoli.

Dicesi *intervallo* di un reticolo L, di estremi a, b con $a \leq b$ e lo si indica con $[a, b]$ l'insieme di tutti gli elementi x di L soddisfacenti alla relazione $a \leq x \leq b$.

Un reticolo dotato di massimo assoluto I e di minimo assoluto 0 dicesi *complementato* se per ogni elemento a di L esiste almeno un elemento a' di L per cui si ha;

$$a \cup a' = \mathrm{I}, \qquad a \cap a' = 0;$$

a' si dirà un complemento di a in L.

Un reticolo dicesi *relativamente complementato*, se è complementato ogni suo intervallo, vale a dire per un intervallo ordinario $[a, b]$ di L con

---

[1]) Per il significato della terminologia vedasi il n. 1.

[2]) Dicesi t-gruppo un gruppo godente della seguente proprietà: Se H è un sottogruppo normale di un sottogruppo normale N di G, H è pure un sottogruppo normale di G.

[3]) Un gruppo dicesi abeliano elementare se è un gruppo abeliano i cui elementi hanno per ordine un numero primo.

$a \leq b$, in corrispondenza ad un elemento qualsiasi x di $[a, b]$ esiste un elemento x' di L per cui

$$x \cup x' = b, \qquad x \cap x' = a;$$

x' si dirà un complemento di x in $[a, b]$.

Ogni reticolo finito, relativamente complementato, è anche complementato.

Se G è un gruppo, con $L(G)$ si indicherà il reticolo individuato da tutti i sottogruppi di G. L'elemento I di $L[G]$ è manifestamente G stesso e lo elemento 0 di $L(G)$ è il sottogruppo identico E di G.

Un gruppo G si dirà *complementato* o *relativamente complementato* se, rispettivamente, è complementato o relativamente complementato il reticolo $L(G)$.

2) Premesse queste definizioni passiamo a caratterizzare i gruppi d'ordine finito relativamente complementati.

Dalla definizione di gruppo relativamente complementato si deducono immediatamente alcune proposizioni, utili per il seguito, che in parte non dimostriamo in quanto sono di facile verifica.

Proposizione I: Se G è un gruppo relativamente complementato, anche ogni suo sottogruppo lo è.

Proposizione II: Se G è un gruppo relativamente complementato ed N è un sottogruppo normale di G, il gruppo $\frac{G}{N}$ risulta pure relativamente complementato.

Proposizione III: Un gruppo finito G, relativamente complementato, od anche solo complementato, ha il sottogruppo di Frattini Φ_G identico.

Invero un complemento H di Φ_G, se non coincide con G, è contenuto in un sottogruppo massimo M, il quale dovrà contenere anche Φ_G (perchè Φ_G è in ogni sottogruppo massimo di G), quindi anche $H \cup \Phi_G = G$. Pertanto M deve coincidere con G, il che è assurdo. Ne segue che H coincide con G, onde $\Phi_G = E$.

Proposizione IV: Un t-gruppo G d'ordine finito è relativamente complementato se e solo è abeliano elementare.

Per la necessità della condizione si ricordi che il gruppo $\frac{G}{\Phi_G}$ è abeliano elementare e che nel nostro caso $\Phi_G = E$ per la prop. III. La sufficienza è di facile verifica.

Dalle prop. I e IV deduciamo pertanto il

Teorema I: In un gruppo G d'ordine finito relativamente complementato tutti i sottogruppi di Sylow sono abeliani elementari.

Teorema II: Un gruppo relativamente complementato è un t-gruppo.

Invero sia G_1 un sottogruppo normale di G, ed H un sottogruppo normale di G_1. Indichiamo con G' un sottogruppo di G per cui valgono le relazioni

$$G_1 \cup G' = G, \qquad\qquad G_1 \cap G' = H$$

il che è possibile date le ipotesi fatte su G. Poichè ora G_1 è un sottogruppo normale di G, $G_1 \cap G' = H$ sarà un sottogruppo normale di G'. Ma H è per ipotesi un sottogruppo normale di G_1, e quindi H è un sottogruppo normale pure di $G_1 \cup G'$, ossia di G.

In una mia nota, in cui mi sono occupato dello studio dei t-gruppi risolubili d'ordine finito, dimostrai che ogni tale gruppo è supersolubile [1])

Se teniamo quindi presente il teorema I, perveniamo al seguente

Teorema III: Un gruppo d'ordine finito, risolubile, relativamente complementato è supersolubile.

Siamo ora in grado di dimostrare il

Teorema IV: Un gruppo d'ordine finito G relativamente complementato non può essere semplice.

Ragioniamo per assurdo, supponendo il gruppo semplice.

Per un noto teorema di BURNSIDE, se un sottogruppo di SYLOW di un gruppo G appartiene al centro del proprio normalizzante, non è semplice. Allora se G è semplice, ed S un suo sottogruppo di SYLOW abeliano, il normalizzante N_S di S contiene *propriamente* S. Infatti, se fosse $N_S = S$, S, essendo abeliano apparterrebbe al centro di N_S e G non sarebbe semplice. Prendiamo allora in G un sottogruppo di SYLOW S il cui ordine sia potenza del minimo fattore primo q divisore dell'ordine di G. Sarà $N_S \supset S$. Sia P un sottogruppo di SYLOW di N_S d'ordine primo coll'ordine di S. Poichè S è un sottogruppo normale di N_S, l'ordine di $P \cup S$ sarà divisibile soltanto per due fattori primi distinti. Ma allora il gruppo $P \cup S$ è risolubile e per la proposizione I pure relativamente completamentato. Il teorema II ci dice allora che $S \cup P$ è supersolubile. Ne segue che P è un sottogruppo normale di $S \cup P$, essendo il suo ordine potenza di un fattore primo maggiore di q. Quindi $S \cup P = S \times P$. Se ne deduce che S sta nel centro di N_S essendo ogni elemento di S permutabile con un qualsiasi elemento di un sottogruppo di SYLOW di N_S. Ma allora in virtù del sopra citato teorema di BURNSIDE, il gruppo G non può essere semplice. L'assurdo cui siamo pervenuti prova il nostro teorema.

Se teniamo ora presente la prop. II, i teoremi IV, II e I perveniamo alla seguente

Conclusione: Condizione necessaria affinchè un gruppo d'ordine finito

---

[1]) G. ZACHER: *Determinazione dei t-gruppi d'ordine finito, risolubili.* Ricerche di Matematica dell'Università di Napoli, vol. I, fasc. 1.

sia relativamente complementato è che sia un t-gruppo risolubile a sottogruppi di Sylow tutti abeliani elementari.

3) Invertiamo in questo n. la conclusione raggiunta al n. 2.

Sia G un gruppo risolubile d'ordine finito g. Scomposto g nei suoi fattori primi $g = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, sia $p_1 > p_2 > \dots > p_k$. Nella citata nota [1]) sui t-gruppi dimostrai il seguente teorema: Condizione necessaria e sufficiente affinchè G sia un t-gruppo è che i suoi sottogruppi di Sylow siano abeliani o hamiltoniani e che in G si possa trovare una successione di sottogruppi di Sylow $S_1, S_2, \dots, S_k$, con S_i ($i=1, 2, \dots k$) d'ordine $p_i^{\alpha_i}$ tale che, comunque si fissi un elemento s_i di S_i, s_i trasformi tutti gli elementi di S_j per $j < i$ in una stessa potenza. Per comodità di esposizione chiameremo quest'ultima condizione d'ora innanzi semplicemente condizione α.

Da quanto detto discende il seguente corollario: Presi comunque due sottogruppi S_i, S_j della suddetta successione, non solo S_i è permutabile con S_j, ma pure ogni sottogruppo di S_i è permutabile con ogni sottogruppo di S_j.

Facciamo a questo punto una breve considerazione sui gruppi risolubili d'ordine finito. Sia G un tale gruppo, e scomponiamo il suo ordine g nel prodotto dei suoi fattori primi $g = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ con $p_1, p_2, \dots p_k$ fattori primi distinti. Sia L un sottogruppo (proprio o improprio) di G, e sia $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$ il suo ordine ($0 \leqq \beta_i \leqq \alpha_i$). E' una immediata conseguenza dei *teoremi* di Hall [2]) sui gruppi risolubili che in corrispondenza a un fissato ordinamento dei fattori primi $p_1, p_2 \dots, p_k$, si può determinare una successione di sottogruppi $T_1, T_2, \dots, T_k$ di L (ove T_i è un sottogruppo di Sylow d'ordine $p_i^{\beta_i}$, se $\beta_i > 0$, mentre è il sottogruppo identico, se $\beta_i = 0$), tali che il sottogruppo $T_i \cup T_{i+1} \cup \dots \cap T_k$ abbia ordine $p_i^{\beta_i} \dots p_k^{\beta_k}$ per $i=1,2 \dots k$. Chiameremo per brevità la successione $T_1, T_2, \dots T_k$ una σ-successione di L. La definizione verrà usata anche nel caso in cui L coincide con G.

Dimostriamo allora il seguente teorema: Se G è un gruppo risolubile d'ordine finito $g = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ ed L un suo sottogruppo, se si fissa una σ-successione $T_1, T_2, \dots, T_k$ di L, allora si può trovare una σ successione $S_1, S_2, \dots, S_k$ di G tale che

$$T_i \leqq S_i \qquad \text{per } i = 1, 2, \dots k.$$

Poichè il teorema risulta soddisfatto se G è un p-gruppo, applichiamo per la dimostrazione un procedimento d'induzione, supponendo il teorema vero se G è un gruppo il cui ordine è divisibile soltanto per $k-1$ fattori primi distinti, e faremo vedere che di conseguenza il teorema è vero se G è un gruppo il cui ordine è divisibile per k fattori primi distinti.

---

1) Vedasi nota precedente.

2) H Zassenhans, : *Lehrbuch der Gruppentheorie*, Teubner, pag. 127.

Essendo L un gruppo risolubile, possiamo scomporre L nel prodotto di due gruppi $L = TM$, con T d' ordine $p_1^{\gamma_1}$ ove $0 \leqq \gamma_1 \leqq \alpha_1$ ed M d' ordine primo con p_1.

Data la risolubilità di G, M sarà sottogruppo di un conveniente sottogruppo F di G d' ordine $p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Ora il gruppo F è risolubile e quindi, per l' ipotesi d' induzione, per i gruppi M ed F il nostro teorema è vero, vale a dire esiste una σ-successione $S_2, S_3, \dots S_k$ di F con $S_i \geqq T_i$ $(i = 2, 3, \dots k)$.

Se quindi diciamo S_1 un sottogruppo di Sylow di G d' ordine $p_1^{\alpha_1}$ contenente T_1, $S_1, \dots S_k$ costituisce la cercata σ-successione di G.

Ritornando al nostro t-gruppo G, sia L un sottogruppo di G, ed H un sottogruppo di L

$$G \supset L \supset H.$$

Ordiniamo i fattori primi distinti dell' ordine g di G in ordine decrescente per modo che risulti $p_1 > p_2 > \dots > p_k$. Fissiamo indi una σ-successione di H

$$(1) \qquad P_1, P_2 \dots P_k.$$

Pel teorema dimostrato esiste allora una σ-successione

$$(2) \qquad T_1, T_2, \dots T_k$$

di L ed una σ-successione

$$S_1, S_2 \dots S_k$$

di G con

$$S_i \geqq T_i \geqq P_i$$

Dimostrai precedentemente [1]) che una σ-successione di un t gruppo relativo ad un ordinamento decrescente dei farttori primi soddisfa alla proprietà α. Per il corollario enunciato in questo n., possiamo dire che i gruppi degli insiemi (2) e (3) sono a 2 a 2 permutabili, e se teniamo presente il teorema enunciato all' inizio di questo n. che caratterizza i t-gruppi risolubili d' ordine finito, possiamo dire che ogni sottogruppo di G è pure un t-gruppo.

Supponiamo infine G sia un t-gruppo risolubile a sottogruppi di Sylow

---

[1]) Vedasi G. Zacher, Nota citata.

abeliani elementari. Conservando il significato ai simboli usati in precedenza, indichiamo con T_i' il complemento di T_i in S_i e consideriamo il gruppo

$$L' = (T_1' \times P_1) \cup \ldots \cup (T_k' \times P_k)$$

Sarà intanto

$$L \cup L' \doteq G \quad , \quad L \cap L' \geqq H$$

Determiniamo l' ordine di L'. Essendo $T_i' \times P_i$ contenuto in S_i (e analogamente $T_j' \times T_j$ in S_j), in base al corollario all' inizio di questo n., $T_i' \times P_i$ è permutabile con $T_j' \times P_j$. Indicando con $o\,(X)$ l' ordine del gruppo X, si ha

$$o(T_i) = \frac{o(S_i)}{o(T_i)}, \; o(T_i' \times P_i) = \frac{o(S_i)}{o(T_i)}\, o(P_i),\; o(L') = \prod_{i=1}^{k} \frac{o(S_i)}{o(T_i)}\, o(P_i) = \frac{o(G)}{o(L)}\, o(H)$$

$$(3) \qquad o\,(L)\, o\,(L') = o\,(G)\, o\,(H)$$

D' altra parte L' è permutabile con L, in quanto T_i lo è con $T_j' \times P$ (per $i=j$, perchè S_i è abeliano, pel $i \neq j$ per corollario all' inizio di questo n.)

Pertanto, posto $K = L \cap L'$, si ha

$$o\,(L)\, o\,(L') = o\,(G)\, o\,(K)$$

Ma allora in base alla (3) $o(K) = o(H)$, ed essendo $K \geqq H$ concludiamo con $K = H$, cioè

$$L \cap L' = H$$

Risulta così provato il

Teorema V: Se G è un t-gruppo d' ordine finito risolubile a sottogruppi di Sylow abeliani elementari ogni intervallo del tipo $[H, G]$ di $L\,(G)$ è complementato.

Se teniamo però presente che ogni sottogruppo di G è pure un t-gruppo dello stesso tipo, dal teorema V deduciamo il

Corollario: Se G è un t-gruppo d' ordine finito, risolubile, a sottogruppi di Sylow abeliani elementari, G risulta relativamente complementato.

Pertanto confrontando questo corollario colla conclusione del n. 2 otteniamo la seguente caratterizzazione :

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo G *d' ordine fi-*

nito sia relativamente complementato è che G *sia un* t*-gruppo risolubile a sottogruppi di* Sylow *tutti abeliani elementari.*

4) Le considerazioni fatte ci permettono di indicare il modo con cui si può costruire un gruppo relativamente complementato G di dato ordine finito g.

Posto $g = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ con $p_1 > p_2 > \dots > p_k$, tenendo presente il teorema III del n. 2 si ha che ogni sottogruppo di G d' ordine $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$, con $1 \leq i \leq k-1$, è normale in G. Pertanto supposto di aver costruito un gruppo relativamente complementato N d'ordine $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}$ (nel caso $k=2$, N si assumerà abeliano elementare) per ottenere un gruppo relativamente complementato G d' ordine $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, basterà effettuare un ampliamento di N secondo un gruppo abeliano elementare S_k d' ordine $p_k^{\alpha_k}$, colla condizione che se S_1 ,,, $S_2 \dots S_{k-1}$ indica una successione di sottogruppi di Sylow di N d' ordini rispett. $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2} \dots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}$ soddisfacenti alla condizione α (n. 3), l' automorfismo su N associato ad ogni elemento s_k di S_k sia tale da subordinare un automorfismo su S_i ($i=1, 2 \dots k-1$) che muta ogni elemento s_i di S_i in una stessa potenza $s_i^{r_{i,k}}$ ove $r_{i,k}$ è un intero dipendente da s_k e soddisfacente alle relazioni $1 \leq r_{i,k} \leq p_i - 1$, $r_{i,k}^{p_k} \equiv 1 \ (p_i)$.

Sul calcolo di progetto delle sezioni in cemento armato precompresso

Nota del dott. **Cesare Montuori**, *presentata dal socio* **Adriano Galli**

(Adunanza del dì 6 dicembre 1952)

Sunto. — Si prendono in esame sezioni a doppio T formate da elementi (anima ed ali) di piccolo spessore e si ricavano formule dalle quali, assegnati gli spessori, l'altezza e le sollecitazioni ammissibili, si ricavano direttamente le rimanenti caratteristiche.

Per il calcolo di progetto di una sezione a doppio T in cemento armato precompresso si assumono correntemente come incognite i valori del momento di inerzia I e la distanza y_G del baricentro dal bordo superiore [1]. Queste due grandezze si determinano facilmente e direttamente in funzione dei parametri assegnati.

Ci si riconduce in tal modo a ricercare una sezione di momento di inerzia I ed avente il baricentro G alla distanza y_G dal bordo superiore. Si procede quindi per tentativi, assumendo in primo luogo una sezione simmetrica con momento di inerzia I e poi, aumentando lo spessore di una delle ali di una certa quantità e diminuendo lo spessore dell' altra della stessa quantità, si sposta il baricentro G sino a portarlo a distanza y_G dal bordo superiore.

In quanto segue si mostra come mediante un' opportuna scelta delle incognite, possano ricavarsi formule di progetto assai semplici, che permettono la risoluzione diretta del problema.

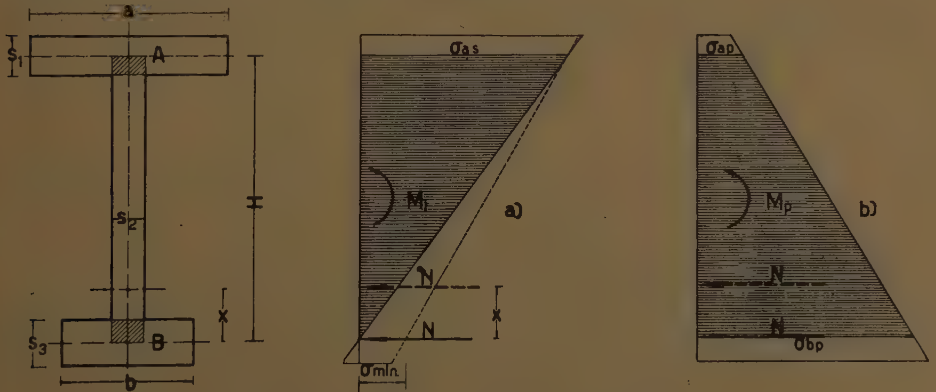


Fig. 1.

Si consideri una sezione a doppio T (v. fig. 1). Se si suppone di poter trascurare le dimensioni s_i rispetto alla H, si assuma come altezza della

[1]) V., p. es., *Il conglomerato precompresso* di C. Cestelli Guidi, pag. 77.

sezione proprio H, definita come distanza tra i baricentri delle due aree A e B. Con questa ipotesi andiamo esplicitamente a trascurare l' incremento di sollecitazione lungo s_1 ed s_3; (in qualche caso, ove i valori s non siano tanto piccoli si potrà introdurre nel calcolo una sollecitazione ammissibile ridotta nel rapporto $H/H + \frac{s_i}{2}$).

Con riferimento alla fig. 1 si assumano come incognite del problema i valori di a, b, N e σ_{ap} e si immagini che lo sforzo di precompressione N sia concentrato nel baricentro dell' area inferiore B [1]. Si indichino con:

σ_{as} la sollecitazione unitaria al bordo superiore in servizio

σ_{bs} « « « inferiore «

σ_{ap} la sollecitaz. unit. al bordo super. durante la precompressione

σ_{bp} « « « infer. « «

con M_t il momento flettente massimo e con M_p quello su cui si può certamente contare all' atto della precompressione.

Si ricaveranno le quattro incognite a, b, N e σ_{ap} dalle quattro equazioni di equilibrio interno, due delle quali debbono essere soddisfatte all' atto della precompressione, due in fase di servizio.

Si scriva anzitutto l' equazione di equilibrio alla rotazione della sezione intorno all' asse b-b passante per il baricentro dell' area B (v. fig. 1a) [2]

$$(1) \qquad M_t = \sigma_{as}\, a\, s_1\, H + \sigma_{as}\, s_2 \frac{H^2}{3}.$$

Da questa si ottiene subito:

$$(2) \qquad a = \frac{M_t}{\sigma_{as}\, s_1\, H} - \frac{s_2}{s_1}\,\frac{H}{3}.$$

Lo sforzo di precompressione si determina con l' equazione di equilibrio alla traslazione:

$$N = \sigma_{as}\, s_1 + \sigma_{as}\, s_2 \frac{H}{2}.$$

Ricavando dalla (2) il valore di a e sostituendo, si ha esplicitamente:

$$(3) \qquad N = \frac{M_t}{H} + \frac{1}{6}\,\sigma_{as}\, s_2\, H \quad ^{3)}.$$

---

[1]) Si mostrerà in seguito che non sempre è possibile mantenere N in questa posizione.

[2]) Si pone qui $\sigma_{bs}=0$ perchè la sezione rimane tanto meglio utilizzata quanto più grande è il valore $\sigma_{as}-\sigma_{bs}$. V. ad es. GUYON « Il c. a. precompresso ».

[3]) N è decrescente con H fin tanto che prevale il termine M_t/H. Si mostra per derivazione che N raggiunge il minimo quando $H=\sqrt{\frac{6\, M_t}{\sigma_{as} s_2}}$; in effetti per questo valore di H, a diventa negativo; dunque in pratica è sempre N decrescente con H.

Si vede quindi che a ed N sono fissati adoperando le sole condizioni di servizio; si calcola ora σ_{ap} dall'equazione di equilibrio alla rotazione intorno all'asse b-b all'atto della precompressione. Si ha:

$$M_p = H\,\sigma_{ap}\left(s_1\,a + s_2\frac{H}{3}\right) + \frac{s_2\,H^2}{6}\,\sigma_{bp} \tag{4}$$

Risulta quindi sostituendo il valore di a:

$$\sigma_{ap} = \frac{\dfrac{M_p}{H} - \dfrac{s_2\,H}{6}\,\sigma_{bp}}{\dfrac{M_t}{\sigma_{as}\,H}}. \tag{5}$$

Dall'equazione di equilibrio alla traslazione si ha poi:

$$CN = \sigma_{ap}\,a\,s_1 + \sigma_{bp}\,b s_3 + \frac{\sigma_{ap}+\sigma_{bp}}{2}\,s_2\,H. \tag{6}$$

ed infine:

$$b = \frac{CN}{\sigma_{bp}\,s_3} - \frac{\sigma_{ap}}{\sigma_{bp}}\,\frac{s_1}{s_3}\,a - \frac{s_2}{s_3}\,\frac{H}{2}\left(1 + \frac{\sigma_{ap}}{\sigma_{bp}}\right). \tag{7}$$

Mediante la (5) e la (7) il problema del progetto è risolto: infatti sostituito nella (5) l'assegnato valore di σ_{bp}, si otterrà σ_{ap}, che a sua volta posto nella (7), permette di ricavare b [1]).

Si osservi che converrà assumere σ_{bp} molto grande allo scopo di ridurre b.

Fin qui abbiamo supposto che per l'assegnato valore di σ_{bp} la (5) porgesse valori di σ_{ap} positivi (di compressione) o negativi (di trazione) ma sufficientemente piccoli; osserviamo ora che nel caso in cui il momento M_p sia molto piccolo, potrebbero verificarsi all'atto della precompressione sollecitazioni di trazione non sopportabili al bordo superiore.

(Il caso limite si verifica per:

$$M_P = \frac{s_2\,H^2}{6}\,\sigma_{bp}). \tag{8}$$

In questa evenienza si potrebbe pensare di modificare s_2, H, e σ_{bp}; ma difficilmente i primi due fattori potranno essere ridotti; infatti generalmente la grandezza s_2 viene limitata inferiormente dallo sforzo tagliante e da criteri di pratica costruttiva, e la H, il più delle volte, viene stabilita con considerazioni estetiche ed economiche; in quanto a σ_{bp} si è dianzi invocata l'opportunità di tenerlo il più alto possibile.

[1]) Si noti che nella (7) si dovrà porre un valore di N ottenuto moltiplicando quello ricavato dalla (3) per un certo fattore C per tener conto della caduta di tensione dell'acciaio nel tempo

Non resta dunque che introdurre nella (4) e quindi nella (5), un fattore correttivo dello stesso segno di M_p spostando il punto di applicazione di N verso l'alto di una quantità x; (v. fig. 1). Allora le (2) e (3) si trasformano nelle seguenti:

$$a = \frac{M_t + Nx}{\sigma_{as} s_1 H} - \frac{s_2}{s_1}\frac{H}{3} \quad (2'); \qquad N = \frac{\frac{M_t}{H} + \frac{1}{6}\sigma_{as} s_2 H}{1 - \frac{x}{H}}. \quad (3')$$

Conviene ora, per ottenere la migliore utilizzazione della sezione, di assegnare oltre σ_{bp} anche σ_{ap} e precisamente di porlo uguale a zero. L'equazione di equilibrio alla rotazione in sede di precompressione diventa allora:

$$(5') \qquad \frac{x}{H} = \frac{1}{CN}\left(\frac{s_2 H \sigma_{bp}}{6} - \frac{M_p}{H}\right).$$

Sostituendo nella (3') il termine $\frac{x}{H}$ ricavato dalla (5'), si trae per N:

$$(5'') \qquad N = \frac{CM_t - M_p}{CH} + \frac{s_2 H}{6}\left(\sigma_a + \frac{\sigma_{bp}}{C}\right).$$

Determinato con la (5'') il valore di N, si calcoleranno a ed x con la (2') e con la (5') e b con la (7) la quale con l'ipotesi che sia $\sigma_{ap} = 0$, si scrive:

$$(7') \qquad b = \frac{CN}{\sigma_{bp} s_3} - \frac{s_2}{s_3}\frac{H}{2}.$$

Vogliamo ora dare formule appena più complesse che contemplano la presenza di sollecitazioni diverse da zero al bordo inferiore durante il servizio $\sigma_{bs} = \sigma_{min} > 0$.

In questa ipotesi il diagramma delle tensioni in fase di servizio diviene trapezio (v. fig. 1 a) e l'equazione (1) si trasforma nella seguente (si trascura il contributo apportato alla coppia interna dalle tensioni agenti sull'area inferiore B):

$$(8) \qquad a = \frac{M_t + Nx}{\sigma_{as} s_1 H} - \frac{s_2}{s_1}(2\sigma_{as} + \sigma_{min})\frac{H}{6\sigma_{as}}.$$

Dall'equazione di equilibrio alla traslazione, dopo aver sostituito il valore di a ottenuto dalla (8), si ha in sostituzione della (2):

$$(9) \qquad N = \frac{\frac{M_t}{H} + s_2 H \left(\frac{\sigma_{as}}{6} + \frac{\sigma_{min}}{3}\right) + \sigma_{min} b s_3}{1 - \frac{x}{H}} .$$

Osserviamo che nella (9) compaiono in generale due incognite: x e b.

Dall'equazione di equilibrio alla rotazione in fase di precompressione, introducendo il valore (8) di a, si ha infine:

$$(10) \qquad \sigma_{ap} = \frac{\frac{M_p + CNx}{H} - \frac{s_2 H \sigma_{bp}}{6}}{\frac{1}{\sigma_{as}}\left(\frac{M_t + Nx}{H} - \frac{\sigma_{min} s_2 H}{6}\right)}$$

nella quale sono incogniti N ed x.

Distinguiamo anche qui due casi: I) che, posto $x = 0$, σ_{ap} risulti maggiore di zero; II) che risulti invece minore di zero. Nel primo caso resta confermata la posizione fatta e quindi ricavando il valore di b dalla (7) e sostituendolo nella (9), si trae per N:

$$(11) \qquad N = \frac{\frac{M_t}{H} + s_2 H \left(\frac{\sigma_{as}}{6} - \frac{\sigma_{min}}{6}\right) - \sigma_{min} \frac{\sigma_{ap}}{\sigma_{bp}} \left(s_1 a + \frac{s_2 H}{2}\right)}{1 - \frac{C \sigma_{min}}{\sigma_{bp}}} .$$

Il termine a si calcola con la (8) per $x = 0$ e il termine σ_{ap} con la (10); il valore b si ottiene poi con la (7).

Facciamo ora il caso che risulti $\sigma_{ap} < 0$. Calcoleremo x imponendo che sia $\sigma_{ap} = 0$. Dovrà essere quindi per la (10):

$$(12) \qquad \frac{M_p + CNx}{H} - \frac{s_2 H \sigma_{bp}}{6} = 0$$

da cui:

$$(13) \qquad \frac{x}{H} = \frac{1}{CN}\left(\frac{s_2 H \sigma_{bp}}{6} - \frac{M_p}{H}\right);$$

intanto poichè:

$$(7') \qquad b = \frac{CN}{\sigma_{bp} s_3} - \frac{s_2}{s_3} \frac{H}{2}$$

la (9) diventa:

$$(9') \qquad N = \frac{\dfrac{M_t}{H} + \dfrac{s_2 H}{6}(\sigma_{as} - \sigma_{min})}{1 - \dfrac{x}{H} - \dfrac{\sigma_{min}}{\sigma_{bp}} C}$$

ed ancora introducendo la (13);

$$(14) \qquad N = \frac{\dfrac{CM_t - M_p}{CH} + \dfrac{s_2 H}{6}\left(\sigma_{as} - \sigma_{min} + \dfrac{\sigma_{bp}}{C}\right)}{1 - \dfrac{\sigma_{min}}{\sigma_{bp}} C}.$$

Ottenuto in tal modo N si calcola x con la (13) e quindi a con la (8) e b con la (7').

Esempio:

Sia $M_t = 200000$ kgm; $H = 135$ cm; $s_1 = 12$ cm; $s_2 = 16$ cm; $s_3 = 18$ cm;

$$M_p = 33000 \text{ kgm}; \ \sigma_{amm} = 100 \text{ kg/cm}^2.$$

Si calcola σ_{ap} con la (5) assumendo $\sigma_{bp} = 93$ kg/cm² e $\sigma_{as} = 95$ kg/cm². Si ha: $\sigma_{ap} = 5{,}82$ kg/cm².

Poichè si desidera $\sigma_{ap} = 0$, si dovrà spostare in alto il baricentro dei cavi; si calcola quindi N con la (5''); si pone inoltre: $C = 1{,}20$;

$$N = 189900 \text{ kg}$$

Con le (5'), (2') e (7') si traggono successivamente:

$$x = 5{,}36 \text{ cm}; \ a = 77 \text{ cm}; \ b = 76 \text{ cm}.$$

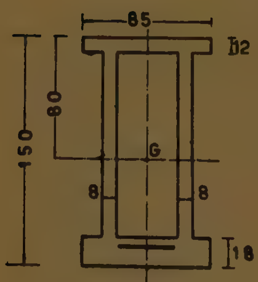


Fig. 2.

E' opportuno incrementare questi valori della quantità $s_2/2$ per tener conto del fatto che l'area comune all'anima ed all'ala viene introdotta nel calcolo due volte; si fa quindi: $a = 85$ cm; $b = 84$ cm.
Verifica della sezione: Area $A = 4452$ cm².
Mom. di inerzia $I = 13\ 700\ 000$ cm⁴.

$$\sigma'_{as} = 98{,}5 \text{ kg/cm}^2; \ \sigma'_{bs} = -5{,}7 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma'_{ap} = -3{,}5 \text{ kg/cm}^2; \ \sigma'_{bp} = 98{,}7 \text{ kg/cm}^2$$

Supponiamo ora invece che si possa realizzare almeno $M_p = 60000$ kgm e che si desideri al bordo inferiore durante il servizio una sollecitazione di compressione di almeno qualche chilogrammo per cmq. Si abbia quindi:

$$M_t = 200\cdot000 \text{ kgm} ;\ H = 135 \text{ cm} ;\ s_1 = 12 \text{ cm} ;\ s_2 = 16 \text{ cm} ;\ M_p = 60000 \text{ kgm} ;$$

$$\sigma_{min} = 6 \text{ kg/cm}^2 ;$$

Assumendo $\sigma_{as} = 96$ kg/cm² e $\sigma_{bp} = 94$ kg/cm², si ricava con la (10) $\sigma_{ap} = 6{,}97$ kg/cm²; consegue $x = 0$, e poi con le (8), (11) e (7):

$$a = 66{,}73 + 8 = 74{,}73 \text{ cm} ;\ N = 194573 \text{ kg} ;\ b = 69{,}85 + 8 = 77{,}85 \text{ cm}.$$

Verifica;

$$A = 4224 \text{ cm}^2 ;\ \mathrm{I} = 12600000 \text{ cm}^4 ;$$

$$\sigma'_{as} = 96 \text{ kg/cm}^2 ;\ \sigma'_{bs} = 3{,}5 \text{ kg/cm}^2 ;$$

$$\sigma'_{ap} = 3{,}7 \text{ kg/cm}^2 ;\ \sigma'_{bp} = 100 \text{ kg/cm}^2.$$

Istituto di Scienza delle Costruzioni dell' Università di Napoli, novembre 1952.

Apparecchio elettrico rer la determinazione delle caratteristiche della sollecitazione nei telai iperstatici

Nota del dott. **Ettore Minervini,** *presentata dal socio* **Adriano Galli**

(Adunanza del dì 6 dicembre 1952)

Sunto. — La teoria della analogia tra le leggi della propagazione dei momenti flettenti nelle aste di un telaio e le leggi della propagazione della corrente elettrica in un particolare schema di circuiti è stata presentata a questa Accademia il 1. dicembre 1951 e bblicata nel precedente volume dei Rendiconto. L'apparecchio elettrico che qui si descrive, realizzazione concreta della sopra ricordata analogia, fornisce le caratteristiche della sollecitazione mediante misura diretta di intensità di corrente. Per un assegnato schema di telaio, le rigidezze delle singole aste sono rappresentate da resistenze elettriche, ed i carichi su di esse agenti da forze elettromotrici.

L'apparecchio elettrico che fornisce le caratteristiche della sollecitazione nei telai iperstatici, realizzato in virtù della analogia « intensità di corrente-momento flettente », studiata in una precedente nota pubblicata nel Rendiconto di questa Accademia, comporta la costruzione di un circuito elettrico per ogni asta costituente il telaio da analizzare, ed il collegamento dei due estremi di ogni circuito con gli estremi degli altri, secondo lo stesso schema in cui sono disposte le corrispondenti aste del telaio.

In queste condizioni ogni circuito elettrico acquista speciali proprietà:

— le correnti che attraversano i suoi due estremi sono proporzionali ai momenti flettenti che sollecitano gli stessi estremi della corrispondente asta;

— i carichi che agiscono sull'asta inducendo ai due estremi di essa (quando sia pensata semplicemente appoggiata ai due estremi) due rotazioni φ_1 e φ_2, sono rappresentati da due forze elettromotrici E_1 ed E_2, inserite nei due rami principali del circuito corrispondente, e proporzionali a φ_1, rispettivamente a φ_2.

Per un assegnato schema di telaio, avendo collegato tra di loro i circuiti corrispondenti al detto schema, ed avendo inserito in ognuno di essi le due forze elettromotrici rappresentanti i relativi carichi, i momenti agli estremi di ogni asta si conosceranno mediante la misura dell'intensità di corrente circolante negli estremi corrispondenti dei relativi circuiti.

Si descrivono ora le caratteristiche costruttive del primo apparecchio, realizzato nell'Istituto di Scienza delle Costruzioni di Napoli.

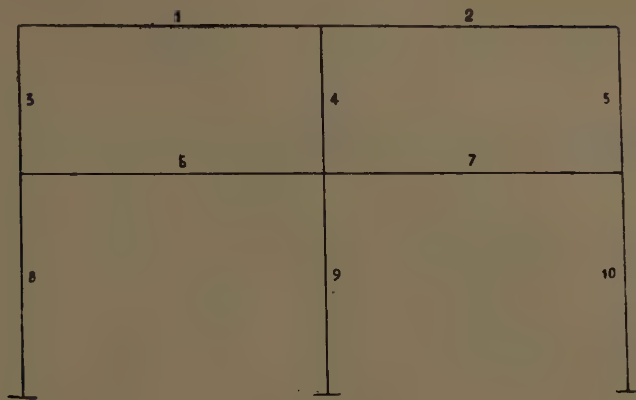


Fig. 1.

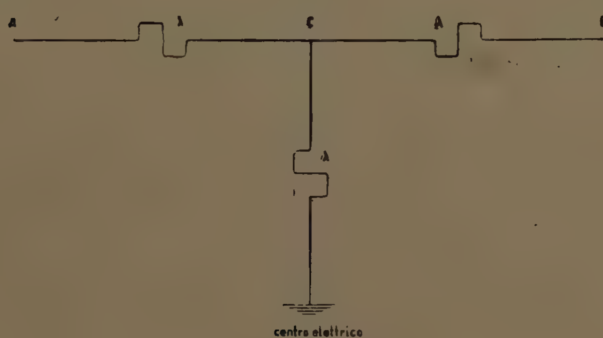


Fig. 2.

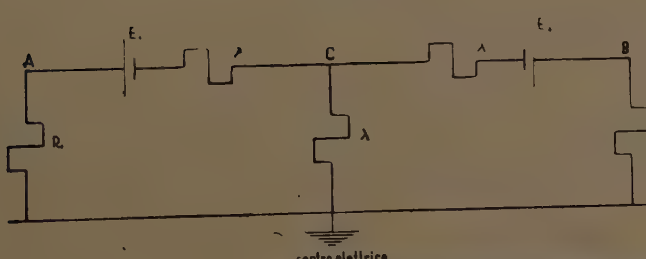


Fig. 3.

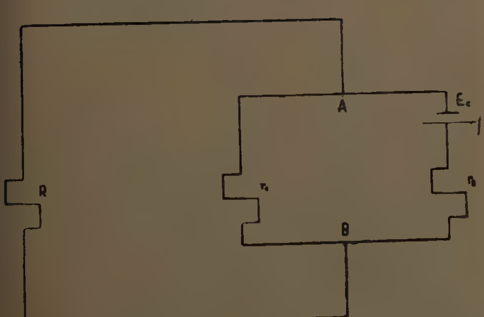


Fig. 4.

Fig. 5.

L' apparecchio comprende dieci circuiti elementari, corrispondenti ad altrettante aste, permanentemente collegati fra di loro secondo lo sehema di un telaio a due piani e due campate (fig. 1).

Da questo schema sono ottenibili altri ridotti: ad esempio, sopprimendo le aste n. 10, 6 e 4, si ottiene una trave continua di sette campate, con la successione: asta n. 9, 7, 5, 2, 1, 3, 8.

Il circuito elettrico corrispondente all' asta generica del telaio consta di tre rami concorrenti in un punto C (fig. 2), ciascuno di resistenza elettrica λ, che, per quanto si è dimostrato nella esposizione teorica della analogia, deve essere proporzionale alla deformabilità (intesa come rotazione di un estremo dell' asta, supposta semplicemente appoggiata, quando l' altro estremo sia sollecitato da una coppia unitaria) β dell' asta relativa.

Il circuito si completa con tutti i dispositivi atti alla produzione ed alla misura delle correnti rappresentanti i momenti flettenti.

Essi si possono dividere in tre categorie:

a) reostati varianti la resistenza elettrica λ dei tre rami di ciascun circuito, resistenza che deve essere proporzionale al β dell' asta cui quel circuito si riferisce;

b) dispositivi per l' inserzione di due forze elettromotrici per ogni circuito;

c) dispositivi per la misura delle correnti.

Il dispositivo *a)* si applica a ciascuno dei tre rami: i dispositivi *b)* e *c)* si applicano solo a due rami, che vengono detti rami principali.

Gli estremi dei rami principali, che corrispondono agli estremi della asta cui il circuito si riferisce, si collegano agli estremi degli altri circuiti in conformità della successione delle aste nel telaio.

Il terzo ramo invece è permanentemente collegato ad un conduttore di resistenza nulla, detto: centro elettrico dell' apparecchio.

La resistenza elettrica λ del terzo ramo è somma di una resistenza costante di dieci Ohm e di una resistenza r che può variarsi manovrando il dispositivo *a)*. La resistenza totale assume i seguenti valori:

$\lambda = 10 . 12{,}6 . 15{,}8 . 20 . 25 . 31{,}5 . 39{,}6 . 50 . 63 . 79{,}2.$

Non si è ritenuto opportuno ottenere una variazione continua di λ; i valori che essa può assumere sono però termini di una serie geometrica, risultandone uno scarto percentuale costante tra ogni valore ed il successivo.

La resistenza elettrica degli altri due rami è somma di una resistenza costante di nove Ohm, una resistenza r variabile mediante il dispositivo *a)*, ed infine una resistenza costante di 1 Ohm.

Le resistenze r dei tre rami si variano contemporaneamente con il dispositivo *a)*, consistente in un reostato triplice.

Le due resistenze di 9 Ohm fanno parte dei dispositivi *b)* per l'inserzione delle forze elettromotrici e le resistenze di 1 Ohm fanno parte dei dispositivi *c)* per la misura delle correnti.

Ricordiamo dalla teoria che un qualsiasi sistema di carichi, o di spostamenti normali relativi Δ fra i nodi, agenti su di una trave semplicemente appoggiata, induce sui suoi due estremi le rotazioni φ_1 e φ_2. I momenti M_1 ed M_2 che nascono in corrispondenza degli stessi due estremi, quando questi vengano innestati in due incastri elastici di deformabilità (intesa come rotazione dell'asse dell'incastro sotto l'azione di una coppia unitaria) ε_1 e ε_2, sono proporzionali a φ_1 e φ_2 secondo le seguenti relazioni:

$$M_1 = \frac{\varphi_1}{\beta}\,\frac{2+\gamma_2}{\gamma_0} + \frac{\varphi_2}{\beta}\,\frac{1}{\gamma_0}$$

$$M_2 = \frac{\varphi_2}{\beta}\,\frac{2+\gamma_1}{\gamma_0} + \frac{\varphi_1}{\beta}\,\frac{1}{\gamma_0}.$$

In cui:

$$\gamma_1 = \frac{\varepsilon_1}{\beta}$$

$$\gamma_2 = \frac{\varepsilon_2}{\beta}$$

$$\gamma_0 = 3 + 2\gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2.$$

Se si inseriscono nel circuito elettrico corrispondente (fig. 3) due forze elettromotrici E_1 ed E_2, le correnti nei due rami principali sono fornite da

$$i_{ac} = \frac{E_1}{\lambda}\,\frac{2+\gamma_2}{\gamma_0} + \frac{E_2}{\lambda}\,\frac{1}{\gamma_0}$$

$$i_{bc} = \frac{E_2}{\lambda}\,\frac{2+\gamma_1}{\gamma_0} + \frac{E_1}{\lambda}\,\frac{1}{\gamma_0}.$$

In cui:

$$\gamma_1 = \frac{R_1}{\lambda}$$

$$\gamma_2 = \frac{R_2}{\lambda}$$

$$\gamma_0 = 3 + 2\,\gamma_1 + 2\,\gamma_2 + \gamma_1\,\gamma_2.$$

R_1 ed R_2 rappresentano la resistenza equivalente di tutti i circuiti elettrici innestati ai due estremi B e C, e sono proporzionali, come è stato dimostrato dalla teoria, ad ε_1 ed ε_2.

Dal confronto fra le formule su esposte si nota una corrispondenza diretta fra le grandezze:

— intensità di corrente — momento flettente,
— resistenza elettrica — deformabilità meccanica,
— forza elettromotrice — rotazione meccanica.

Disponendo quindi di forze elettromotrici di valore variabile, basterà la loro inserzione nei circuiti, secondo lo schema della fig. 3, per ottenere le corrrenti le cui intensità, in base alle formule sopra ricordate, sono proporzionali ai valori dei momenti ricercati.

Nella pratica si dispone però di accumulatori, che danno una tensione costante; si è studiato quindi un dispositivo che raggiunge lo scopo di ottenere da un accumulatore una tensione variabile da arbitrio.

Nel circuito ideale di fig. 4 si debba inserire una forza elettromotrice

$$E_v = k\, E_c \qquad (k \text{ compr. tra } 0 \text{ e } 1)$$

partendo da un accumulatore di tensione E_c.

Asportiamo la resistenza elettrica compresa tra i punti A e B, sostituendola con due resistenze in parallelo r_1 ed r_2, la cui resistenza equivalente si mantenga sempre costante e pari a quella asportata. La resistenza totale del circuito non viene così alterata.

Nel ramo di resistenza r_1 inseriamo E_c; si dimostra che la corrente che circola nel circuito inalterato è fornita dalla relazione

$$i = \frac{E_v}{R \text{ tot.}}; \qquad E_v = E_c \frac{1/r_1}{1/r_1 + 1/r_2}.$$

Nell' apparecchio il valore $1/r_1 + 1/r_2$ è sempre uguale a 1/9 Ohm; cioè si asporta la resistenza di 9 Ohm sostituendola con due resistenze in parallelo, la cui resistenza equivalente sia sempre uguale a 9 Ohm. In una di queste resistenze si inserisce l' accumulatore e si variano i valori di r_1 e r_2 fino ad ottenere che E_v abbia il valore desiderato.

Infine il dispositivo *c*) costa di uno speciale interruttore che asporta dal circuito la resistenza di 1 Ohm sostituendovi quella propria di un milliamperometro che è appunto di 1 Ohm. La resistenza totale del circuito non viene alterata, mentre la corrente viene deviata per il milliamperometro che ne segna il valore.

Modo di operare per il calcolo di un telaio a nodi fissi.

Le grandezze caratteristiche del telaio sono:
la lunghezza delle singole aste,
il momento d' inerzia della loro sezione retta,
i carichi agenti sulle aste.

Dalle prime due grandezze si ricava il valore di β per ogni asta; a tale

valore deve farsi proporzionale il valore di λ del circuito corrispondente; ciò si ottiene ruotando la manopola del reostato triplice appartenente al detto circuito.

Per i dieci circuiti dell' apparecchio saranno necessari dieci reostati; essi sono situati nella zona a sinistra dell' apparecchio, e le corrispondenti manopole sono visibili nel quadro a sinistra (v. fotografia).

Dal valore dei carichi si ottengono i valori $\frac{\varphi_1}{\beta}$ e $\frac{\varphi_2}{\beta}$, e dalla eguaglianza

$$\frac{\varphi}{\beta} = \frac{E}{\lambda}$$

si ricavano i valori delle forze elettromotrici da inserire in ogni circuito.

Le manopole dei dispositivi *b)*, che realizzano la variazione di ogni forza elettromotrice inserita, sono visibili nel quadro a destra; esse sono venti, due per ogni circuito.

Al loro fianco si notano due bottoni più piccoli; essi sono i pulsanti dei dispositivi *c)*, premendo i quali si legge al milliamperometro (disposto superiormente all' apparecchio) il valore della intensità di corrente attraversante l' estremo cui il pulsante si riferisce.

Al centro in basso è visibile la monopola che comanda l' inversione del senso della corrente nel milliamperometro; dalla sua posizione si desume il segno del momento (considerato positivo se l' azione del nodo sull' asta è destrorso).

Impostati quindi i valori corrispondenti alle rigidezze delle singole aste ed ai carichi su di essi agenti, basterà premere volta a volta i pulsantini corrispondenti agli estremi di ogni circuito per avere il valore del momento agente sugli estremi rispettivi dell' asta cui ogni circuito si riferisce.

Nodi spostabili.

Quando i nodi si spostano basterà sovrapporre alla configurazione dei momenti ottenuta a nodi fissi un' altra configurazione di momenti ottenuta dalla deformazione del telaio.

Sulle manopoline dei dispositivi *b)* bisognerà impostare, avendo annullato ogni valore corrispondente all' effetto dei carichi a nodi fissi, dei valori E corrispondenti allo spostamento normale Δ relativo (presunto) tra i nodi di ogni asta, secondo la relazione:

$$\frac{E}{\lambda} = \frac{\Delta}{l\beta}$$

dove Δ è lo spostamento normale relativo tra i nodi che si suppone avvenire.

Alla supposta deformazione corrisponderà una configurazione dei momenti flettenti che, sommata a quella corrispondente ai nodi fissi, altererà le forze con cui il telaio premeva contro i vincoli esterni aggiunti dal calcolatore allo scopo di rendere fissi i nodi.

Per tentativi si sceglierà quel sistema di deformazioni il cui corrispondente diagramma dei momenti, sommato al diagramma dei momenti per nodi fissi, annullerà tutte le forze con cui il telaio agiva sui vincoli aggiunti, i quali possono allora considerarsi inesistenti.

Relazione della Commissione giudicatrice per il concorso al premio biennale 1951-52 bandito dall' Accademia di Scienze fisiche e matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli sul tema: *Contributo alla mineralogia vulcanica della Campania.*

Al concorso bandito dall' Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, per il tema *Contributo alla mineralogia vulcanica in Campania,* è stato presentato un solo lavoro dattiloscritto, contradistinto col motto « *Campania felix* ».

Il lavoro, di complessive 83 pagine, consta di due parti: nella prima l' autore tratta dei minerali vesuviani, nella seconda di quelli dei Campi Flegrei e delle Isole; cosicchè può ben dirsi che il lavoro tratti della mineralogia di tutte le zone più interessanti della Campania.

Nella parte dedicata al Vesuvio l' Autore non trascura di dare notizie di interesse storico che erano poco note, o addirittura ignorate, come quelle riguardanti lo zolfo prodotto nell' Atrio del Cavallo nel periodo 1895-99 e la silvestrite, ma, sopratutto, tratta—e la trattazione è fondata su ricerche originali—i minerali formati dal 1944 in poi. Qualche minerale studiato è però di data più antica, come il pirosseno del 1929, del quale sono state illustrate e mostrate, con una serie di fotografie di opportuni modelli, le geminazioni e le associazioni regolari fra i cristalli.

Alcuni minerali studiati si sono formati sulla lava del 1944, e tra questi sono da ricordare la haüynite e la sodalite; altri sono stati osservati nei blocchi rigettati da quest' ultima eruzione, come l' apatite, altri ancora—e sono i più—sono il prodotto dell' attività fumarolica e delle sublimazioni attuali del Vesuvio. Tra questi sono: lo zolfo, cloruri alcalini, l' eritrosiderite, la cotunnite, la tenorite. La formazione di tali minerali—che quasi tutti sono stati personalmente raccolti dall' Autore—è del più alto interesse, perchè dimostra che la fase che attualmente attraversa il Vesuvio non è di quiete ma di attività latente.

In complesso si danno notizie e accurate descrizioni per quanto riguarda l'abito cristallino, la giacitura, la paragenesi e quanto altro può interessare la mineralogia — di una ventina di specie e cioè: zolfo, silvestrite, granulina, ematite, tenorite, salgemma, silvite, clorammonio, cotunnite, molisite, eritrosiderite, aragonite, azzurrite, gesso, plagioclasi, leucite, nefelina, sodalite, haüynite, biotite, augite, olivina, iddingsite.

Nella seconda parte si nota anzitutto un'estesa descrizione dei minerali della zona Solfatara — Pisciarelli: zolfo, realgar, pirite, quarzo, gesso, coquimbite, alumogeno, alotrichite, voltaite, pickeringite, kalinite, alunite. Particolare interesse riveste la scoperta e lo studio della pickeringite, perchè il minerale è nuovo non solo per la zona flegrea, ma per tutte le zone vulcaniche italiane.

Ampiamente trattato è l'argomento della magnetite delle spiagge campane in genere e flegree in ispecie.

Nel lavoro si descrivono inoltre la breislakite di una roccia pipernoide di Ischitella, e vari silicati dei proietti e delle lave specialmente delle Isole Flegree.

Tutti i minerali ricordati sono stati personalmente raccolti dall'autore.

La Commissione ritiene che questo lavoro, che è corredato da numerose analisi chimiche originali e da alcune tavole di illustrazioni, rappresenti un notevole contributo alla mineralogia vulcanica campana e che continui degnamente la tradizione mineralogica napoletana della scuola di Scacchi e Zambonini. In particolare gli studi sui minerali vesuviani costituiscono quasi un'appendice e un aggiornamento della « *Mineralogia Vesuviana* » dello Zambonini; e la Commissione, che ricorda quanta parte abbia avuto l'Accademia di Scienze fisiche e matematiche negli studi mineralogici sul Vesuvio e i Campi Flegrei, è lieta di constatare il successo del tema proposto, e a sua volta propone che al lavoro « *Campania felix* » sia conferito il premio.

Napoli, li 4 dicembre 1952.

LA COMMISSIONE: Giuseppe De Lorenzo, *presidente*
Geremia D'Erasmo
Antonio Scherillo, *relatore*

Processo verbale dell' adunanza del dì 5 gennaio 1952.

Presiede l' adunanza la prof. Maria Bakunin. Sono presenti i soci ordinari Caccioppoli, Colamonico, De Dominicis, De Lorenzo, D' Erasmo (segretario), Giordani, Imbò, Malquori, Miranda, Nobile, Pierantoni, Scherillo, Spampinato, Tolotti, Zappa ed i corrispondenti Beretta e Orrù.

Scusa l' assenza il socio corrispondente Colacevich.

Il segretario comunica la circolare n. 2920 della Presidenza del Consiglio dei Ministri, Ufficio del Libro e della Carta, relativa al contributo alle riviste di elevato valore culturale, ed informa che in data 22 dicembre l' Ufficio di Presidenza ha inviato domanda diretta ad ottenere un congruo aiuto finanziario per la stampa dei suoi Atti e dei suoi Rendiconti. Dà quindi notizia delle principali decisioni adottate nella riunione del 4 gennaio del Consiglio Generale della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti, e principalmente di quelle riflettenti il bilancio consuntivo 1951 e preventivo 1952. Informa infine che la prossima adunanza plenaria contemplata dall' art. 15 dello Statuto è stata fissata al 31 gennaio.

La Commissione Spampinato, Caccioppoli e Zappa riferisce sulla nota del dott. Ulderico BENCIVENGA *Sulla rappresentazione geometrica delle algebre doppie dotate di modulo*, II parte: *bicomplessi*, proponendone l' inserzione nel Rendiconto.

Uguale proposta di accoglimento nel medesimo periodico fa la Commissione Miranda, Caccioppoli e Tolotti per la nota del dr. Antonio ZITAROSA *Sulla formula di inversione per la trasformata di Hankel.* — Entrambe le proposte sono approvate alla unanimità.

Il socio D' Erasmo, tanto in nome proprio che dei colleghi De Lorenzo e Scherillo, legge la relazione sulla memoria dell' ing. Alberto DUCCI dal titolo *Nuovi contributi geoidrologici sull' isola di Capri,* con la conclusione che il lavoro sia meritevole di pubblicazione e con la proposta che l' Accademia, accettandone l' inserzione nel volume in corso degli Atti, si assuma, per le illustrazioni, la spesa della carta e della tiratura, lasciando a carico dell' autore quella relativa alla esecuzione dei clichés. — L' Accademia, unanime, approva.

Il socio DE LORENZO presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo *Instabilità ed inentità del mondo.*

Il socio Miranda presenta, da parte del collega Picone che scusa l' assenza, una nota del dott. Ennio DE GIORGI, *Compiute ricerche dell' ordine inferiore di un particolare funzionale.* Il presidente incarica di riferire su questo lavoro la Commissione costituita dai soci Picone, Miranda e Caccioppoli.

Il socio Scherillo, nella sua qualità di Tesoriere, presenta, a norma dell' art. 27 del Regolamento, il conto degli introiti e degli esiti dell' anno

1951. L' Accademia nomina i due revisori in persona dei soci Imbò e Tolotti, con l' incarico di riferire sul bilancio in una prossima tornata.

Processo verbale dell' adunanza del dì 2 febbraio 1952.

Partecipano all' adunanza la presidente Bakunin, i soci ordinari residenti Carrelli, Colamonico, De Dominicis, D' Erasmo (segretario), Giordani, Imbò, Malquori, Miranda, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato, Zappa, ed i soci corrispondenti Montalenti e Panizzi. Scusa l' assenza il socio Tolotti.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 5 gennaio, che è approvato. Indi esprime al collega Giordani le condoglianze dell' Accademia per il grave lutto familiare che l' ha recentemente colpito. Presenta poi il volume del Rendiconto relativo all' anno 1951 (XVIII della serie 4ª), di cui è stata recentemente ultimata la stampa. Comunica quindi l' invito della Deutsche Akademie der Naturforscher (Leopoldina) di Halle ad assistere alla celebrazione del tricentenario della sua fondazione, che avrà luogo nei giorni 16 e 17 febbraio. L' Accademia stabilisce di inviare la sua cordiale adesione. Legge infine l' invito del presidente della consorella Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti di designare un socio per il Comitato di vigilanza della biblioteca. L' Accademia stabilisce di affidare tale incarico al socio Miranda.

Il socio Miranda riferisce, anche a nome dei colleghi Picone e Caccioppoli, sulla nota del dr. Ennio De Giorgi, *Compiute ricerche dell' estremo inferiore di un particolare funzionale*, proponendone la inserzione nel Rendiconto. — L' Accademia unanime approva.

Il socio Spampinato presenta, per il Rendiconto, una nota del dott. Angelo Fadini dal titolo *Un' interpretazione mediante algebra dei campi finiti di Galois di ordine p^n*. — Il presidente incarica di riferire su di essa la Commissione composta dai soci Spampinato, Miranda e Zappa.

Il socio Zappa presenta, per il medesimo periodico, una nota del dott. Giovanni Zacher *Sugli emimorfismi superiori ed inferiori tra reticoli.* — E' dato incarico di riferire su questo lavoro alla Commissione Zappa, Caccioppoli e Spampinato.

Il socio Imbò, anche a nome del collega Tolotti, riferisce, come revisore dei conti, sul bilancio consuntivo dell' anno 1951, proponendone l' approvazione. — L' Accademia approva all' unanimità.

Constatata la presenza di un numero di soci ordinari superiore a quello minimo richiesto dall' art. 11 dello Statuto per la validità della votazione per la nomina dei soci, si passa quindi, secondo l' ordine del giorno, all' esame della proposta avanzata dalla Sezione di Scienze matematiche di coprire l' unico posto vacante nella categoria dei soci ordinari residenti.

Il presidente comunica che è stato proposto alla unanimità, da questa

Sezione, il nome del prof. Adriano Galli, titolare della Cattedra di Scienza delle Costruzioni presso la Facoltà di Ingegneria dell' Università di Napoli e socio corrispondente, nella medesima Sezione, dal dì 3 giugno 1950.

Il socio Miranda, nella sua qualità di segretario della Sezione predetta, legge il parere motivato sopra i requisiti scientifici del candidato proposto; ed il presidente chiede ai soci ordinari presenti all' adunanza se abbiano a proporre altri nomi. Non avendo alcuno dei presenti fatto altra proposta, il candidato predetto è ammesso a votazione a scrutinio segreto, ottenendo 15 voti favorevoli sopra 15 soci ordinari presenti e votanti.

Il presidente proclama quindi eletto socio nazionale ordinario residente nella Sezione di Scienze Matematiche il prof. Adriano Galli, avvertendo che a norma dell' art. 14 dello Statuto l' elezione sarà comunicata al Ministro della Pubblica Istruzione per la prescritta approvazione del Capo dello Stato.

Processo verbale dell' adunanza del dì 1 marzo 1952.

Assistono all' adunanza la presidente Bakunin, il segretario D' Erasmo, i soci ordinari residenti Carrelli, Colamonico, De Dominicis, De Lorenzo, Galli, Giordani, Imbò, Miranda, Pierantoni, Scherillo, Tolotti, Zappa ed i corrispondenti Catalano ed Orrù.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 2 febbraio, che è approvato.

Indi comunica la lettera del prof. Adriano Galli, che ringrazia l' Accademia per la nomina a socio ordinario residente nella sezione di Scienze matematiche. Partecipa poi la dolorosa notizia della morte del socio corrispondente prof. Enrico Pantanelli, ordinario di Agronomia generale e coltivazioni erbacee e preside della Facoltà di Agraria nell' Università di Bari, ricordandone i principali meriti di uomo e di studioso e mettendone in rilievo la produzione scientifica, rivolta negli anni giovanili soprattutto al campo della fisiologia e della patologia vegetale, e più tardi all' agronomia sperimentale, alla chimica agraria e alla bonifica integrale. Tecnico di larga esperienza, Egli fu per otto anni ispettore al Ministero dell' Agricoltura, per un ventennio direttore della Stazione Agraria Sperimentale di Bari e quindi per un decennio professore di Agronomia in quella Università. Aveva partecipato all' esplorazione scientifica ed economica della Libia ed aveva studiato i problemi della colonizzazione della Cirenaica, contribuendo poi specialmente ai progetti di trasformazione agraria del Tavoliere. Era il decano dei soci corrispondenti della Sezione di Scienze naturali, alla quale apparteneva dal 5 febbraio 1921, ed aveva pubblicato nel Rendiconto accademico molteplici lavori nel periodo 1914-1930.

Il socio Colamonico si associa alle parole del segretario, rilevando

l' importanza dei risultati degli studi di Enrico Pantanelli nel campo della agronomia pugliese.

La Commissione Zappa, Caccioppoli e Spampinato riferisce sulla nota del dott. Giovanni ZACHER *Sugli emimorfismi superiori ed inferiori tra reticoli,* proponendone l' accoglimento per la stampa nel Rendiconto. L' Accademia unanime approva.

Il socio Galli presenta una nota del dr. Aldo RAITHEL *Sulla determinazione della frequenza fondamentale dei sistemi solidali,* ed un' altra del dott. Vincenzo FRANCIOSI dal titolo *Le aste sottili pressoinflesse in regime viscoso.* Il presidente nomina la Commissione Galli, Tolotti e Miranda, con l' incarico di riferire su questi lavori in una prossima adunanza.

Il socio IMBÒ legge la *Commemorazione del corrispondente Giovan Battista Rizzo,* mancato ai vivi fin dal dì 8 febbraio 1945. Assistono la vedova, il figlio e altri familiari, nonché allievi ed estimatori dell' estinto. La commemorazione, seguìta con commossa attenzione da tutti i presenti, sarà pubblicata nel Rendiconto accademico, insieme col ritratto e con lo elenco delle pubblicazioni.

Processo verbale dell' adunanza del dì 5 aprile 1952.

Partecipano all' adunanza la presidente Bakunin, il segretario D' Erasmo, i soci ordinari residenti Carrelli, Colamonico, De Dominicis, De Lorenzo, Giordani, Imbò, Miranda, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato, Tolotti, Zappa ed i corrispondenti Beretta, Montalenti e Panizzi.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 1° marzo, che è approvato. Indi comunica le deliberazioni del Consiglio Generale della Società, adottate nell' adunanza del 18 marzo, riguardanti il funzionamento della Biblioteca, nonchè una recente circolare dell' Ufficio del Libro e della Carta, relativa al Direttore responsabile delle pubblicazioni periodiche. Presenta quindi l' Annuario 1952 della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti, recentemente pubblicato.

La Commissione Spampinato, Miranda e Zappa riferisce sulla nota del dott. Angelo FADINI dal titolo *Un' interpretazione mediante algebre dei campi finiti di Galois di ordine* p^n, proponendone l' inserzione nel Rendiconto. Uguale proposta di accoglimento nel medesimo periodico presenta la Commissione Galli, Tolotti e Miranda nei riguardi della nota del dott. Vincenzo FRANCIOSI dal titolo *Le aste sottili pressoinflesse in regime viscoso.* — Le due proposte suddette sono approvate all' unanimità dall' Accademia.

Il segretario presenta, a nome del socio Diamare che scusa l' assenza, una nota del prof. Vincenzo DIAMARE e del dott. Antonio DE GIROLAMO dal titolo *Ancora sul fegato grasso fisiologico nei Selaci,* corredata da 5 figure intercalate, per la inserzione nel Rendiconto.

Il socio SPAMPINATO presenta una sua IX nota sopra le *Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie di indice n dell' S_r proiettivo complesso,* destinata alla stampa nel Rendiconto.

Il socio Miranda presenta una nota del dott. Guido STAMPACCHIA *Approssimazione di una funzione su una superficie.* Il presidente nomina la Commissione costituita dai soci Miranda, Caccioppoli e Tolotti perchè riferisca su questo lavoro in una prossima adunanza.

Processo verbale dell' adunanza del dì 3 maggio 1952.

Assistono all' adunanza la presidente Bakunin, il segretario D' Erasmo, i soci ordinari residenti Colamonico, De Dominicis, De Lorenzo, Diamare, Giordani, Malquori, Miranda, Nobile, Pierantoni, Scherillo, Tolotti, Zappa, ed i soci corrispondenti Cimmino, Orrù, Panizzi. Scusa l' assenza il socio Salfi.

Il segretario legge il processo verbale della tornata 5 aprile, che è approvato. Indi comunica i ringraziamenti dell' Accademia Caesarea-Leopoldino-Carolina di Halle per la parte presa dall' Accademia alle feste tricentenarie della sua fondazione.

Il presidente dà il benvenuto al socio corrispondente Cimmino, che per la prima volta assiste all' adunanza.

La Commissione Galli, Tolotti e Miranda riferisce sulla nota del dott. Aldo RAITHEL *Sulla determinazione della frequenza fondamentale dei sistemi solidali,* proponendone l' inserzione nel Rendiconto.

Analogamente la Commissione Miranda, Caccioppoli e Tolotti propone di accogliere nello stesso periodico la nota del dott. Guido STAMPACCHIA, *Approssimazione di una funzione su una superficie.*

Entrambe le proposte vengono accolte all' unanimità.

Il socio Miranda presenta una nota del dott. Francesco STOPPELLI *Su un' equazione differenziale della meccanica dei fili.* Il Presidente nomina la Commissione costituita dai soci Miranda, Caccioppoli e Tolotti, perchè riferisca su questo lavoro in una prossima tornata.

Processo verbale dell' adunanza del dì 7 giugno 1952.

Sono presenti i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, De Dominicis, De Lorenzo, D' Erasmo, Diamare, Giordani, Imbò, Malquori, Miranda, Nobile, Salfi, Scherillo, Tolotti ed i corrispondenti Catalano, Orrù e Panizzi. Presiede la presidente Bakunin, segretario il socio D' Erasmo.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 3 maggio, che è approvato.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio è segnalato il volume III (1951) dell' *Annuario dell' Istituto e Museo Zoologico della Università di Napoli,* offerto dal consocio Salfi. — L' Accademia ringrazia.

La Commissione Miranda, Caccioppoli e Tolotti, incaricata di riferire sulla nota del dott. Francesco STOPPELLI *Su un' equazione differenziale della meccanica dei fili,* ne propone all' unanimità la inserzione nel Rendiconto. — L' Accademia approva.

Il socio D' ERASMO presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo *Revisione degli ittioliti miocenici di Bra studiati da Oronzio Gabriele Costa,* accompagnata da una tavola e da 2 figure intercalate. L' Accademia assume a suo carico la spesa delle illustrazioni.

Il segretario presenta, a nome del socio Spampinato che scusa l' assenza, le note seguenti: 1) *Breve studio di una trasformazione birazionale dell' S_5 complesso determinata da una trasformazione quadratica biduale,* del dott. Pio BALSIMELLI; 2) *Studio di una trasformazione cremoniana dell' S_8,* del dott. Angelo FADINI; 3) *Studio di una trasformazione cremoniana dell' S_8 dedotta da una trasformazione quadratica dell' S_2 tripotenziale,* della dott. Rita BRUNO. — Il Presidente nomina la Commissione Spampinato, Miranda e Zappa, con l' incarico di riferire su questi tre lavori nella successiva adunanza.

Il socio corrispondente PANIZZI presenta, per il Rendiconto, una II nota dal titolo *Sintesi nel campo delle sostanze steroidi,* di Luigi PANIZZI e Stefano CORSANO.

Il socio Miranda presenta, per il medesimo periodico, le tre note seguenti: 1) da parte del corrispondente Scorza, una nota del dott. Alberto SAMBO, *Sulla derivazione delle funzioni composte;* 2) da parte del consocio Picone, una nota del dott. Pietro LESKY dal titolo *Calcolo numerico: Ricerca di una funzione armonica soggetta a condizioni al contorno non lineari;* 3) da parte del corrispondente Cimmino una nota del dott. Bruno PINI, *Sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico nei domini non limitati.* — Il Presidente nomina le Commissioni rispettivamente costituite dai soci Scorza, Miranda e Tolotti, dai soci Picone, Miranda e Tolotti, e dai soci Cimmino, Miranda e Caccioppoli, con l' incarico di riferire su questi lavori in una prossima adunanza.

Constatata la validità dell' adunanza, a norma dell' art. 11 dello Statuto Sociale, si passa quindi, secondo l' ordine del giorno, alla elezione dei soci per i posti vacanti nelle diverse categorie.

Il segretario comunica che nelle adunanze di sezioni del dì 3 maggio, quella di Scienze Matematiche decise di non procedere, per ora, ad alcuna proposta di nomina di candidati ai due posti vacanti nella categoria dei soci corrispondenti. La Sezione di Scienze naturali stabilì invece, nella seduta dello stesso 3 maggio, di presentare all' approvazione della Classe un candidato per la nomina al posto vacante di socio ordinario non residente, un candidato per la nomina a socio corrispondente, e un candidato per la nomina ad uno dei due posti vacanti di socio straniero.

Su invito del presidente, il socio D' Erasmo legge le relazioni sui re-

quisiti scientifici del socio corrispondente prof. Ferdinando Milone, ordinario di Geografia economica nella Facoltà di Economia dell' Università di Roma, proposto a voti unanimi dalla Sezione per la nomina a socio ordinario non residente, e del dott. Camillo Arambourg, professore di Paleontologia al Museo Nazionale di Storia Naturale di Parigi, proposto pure alla unanimità dalla medesima Sezione per la nomina a socio straniero. Quindi il presidente chiede ai soci ordinari presenti all' adunanza se abbiano a proporre altri nomi. Non essendo state fatte altre proposte, ciascuno dei candidati predetti è ammesso separatamente a votazione per scrutinio segreto, ottenendo 14 voti favorevoli su 14 soci ordinari e votanti.

Il presidente proclama quindi eletto socio ordinario non residente nella Sezione di Scienze Naturali il prof. Ferdinando Milone, e socio straniero nella medesima Sezione il prof. Camillo Arambourg, avvertendo che, a norma dell' art. 14 dello Statuto, l' elezione sarà comunicata al Ministro della Pubblica Istruzione per l' approvazione del Capo dello Stato.

Successivamente il socio Malquori legge il parere motivato sui requisiti scientifici del prof. Mario Covello, ordinario di Chimica farmaceutica nell' Università di Napoli, proposto a voti unanimi dalla Sezione di Scienze Naturali per la nomina a socio corrispondente. Non avendo alcuno dei presenti chiesto, su domanda del presidente, di integrare la lista con altri nomi, il candidato è ammesso alla votazione per scrutinio segreto. La votazione ha dato 14 voti favorevoli sopra 14 soci ordinari presenti e votanti.

Il presidente proclama pertanto eletto il prof. Mario Covello socio corrispondente nella Sezione di Scienze Naturali.

Si autorizza il Segretario ad accettare, con le limitazioni in vigore, durante il periodo delle ferie estive, le note dei soci di ogni categoria, che saranno eventualmente presentate per la inserzione nel Rendiconto.

Il presente verbale viene redatto, letto ed approvato seduta stante.

Processo verbale dell' adunanza del dì 8 novembre 1952.

Sono presenti i soci ordinari residenti Bakunin, Caccioppoli, Carrelli, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo, Giordani, Imbò, Nobile, Spampinato, Scherillo, Tolotti, Zappa ed i soci corrispondenti Beretta, Covello e Panizzi. Scusano l' assenza i soci Miranda, Salfi e Milone.

Presiede l' adunanza la socia Bakunin, segretario il socio D' Erasmo.

Il presidente dà il benvenuto al socio corrispondente Covello, presente per la prima volta all' adunanza.

Il segretario partecipa, con commosse parole, la morte, avvenuta a Francavilla a Mare il dì 10 dello scorso settembre, del socio ordinario Alberto De Dominicis, e ne ricorda i principali meriti didattici e scientifici, specialmente nel campo della chimica colloidale e pedologica con particolare riguardo al problema agrario meridionale, annunziando che una degna

commemorazione dello Scomparso sarà tenuta dal consocio Giordani in una delle prossime adunanze. Comunica quindi che al concorso per il premio biennale accademico bandito il 3 marzo 1951 sul tema *Contributo alla mineralogia vulcanica aella Campania* e scaduto il 31 ottobre scorso, è stata presentata, in tempo utile, una memoria dattiloscritta contrassegnata dal motto « Campania felix ». — L' Accademia nomina la Commissione costituita dai soci De Lorenzo, Scherillo e D' Erasmo, con l' incarico di riferire su questo lavoro in una prossima tornata.

Legge poi le lettere dei professori Ferdinando Milone, Mario Covello e Camillo Arambourg, che ringraziano l' Accademia per la nomina rispettivamente a socio ordinario non residente, corrispondente e straniero, avvenuta con votazione dello scorso giugno, e dà notizia dell' avvenuta approvazione, da parte del Capo dello Stato, di tali nomine.

Partecipa infine che la Commissione interministeriale per l' esame dei periodici di elevato valore culturale ha concesso all' Accademia un contributo di L. 500.000 per la stampa degli Atti e del Rendiconto.

L' Accademia stabilisce il calendario delle adunanze ordinarie per lo anno 1953, che, in base alle norme solite, risulta il seguente: gennaio 3, febbraio 7, marzo 7, aprile 4, maggio 2, giugno 6, novembre 7, dicembre 5.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio sono segnalate quelle del socio D' Erasmo *Revisione degli ittioliti miocenici di Bra studiati da Oronzio Gabriele Costa* e *Nuovi ittioliti cretacei del Carso triestino* e del socio Nobile dal titolo: *Il conflitto tra Copernicisti e aristotelici nella sua essenza e nel pensiero di Galileo. Rilievi e precisazioni.* Presentando questo suo recente scritto il socio Nobile fa la seguente dichiarazione: « E' oramai trascorso parecchio tempo dalla pubblicazione nei Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei, di un mio studio critico sulla famosa controversia cosmologica aperta da Galileo, materia sulla quale da tre secoli circa correvano con insistenza giudizi formulati da autori scarsamente informati e non particolarmente qualificati a trattare lo argomento, e tali giudizi tendevano ad accreditarsi anche perchè da parte degli uomini di scienza non vi era stato un intervento deciso ed efficace per rettificarli, neppure all' epoca della celebrazione galileiana, in occasione del tricentenario della morte del grande italiano. Ho creduto pertanto far cosa utile col procedere ad una esplicita segnalazione di errori e confusioni, con una opportuna e diffusa precisazione del senso che si deve attribuire presentemente al complesso dei problemi galileiani dopo la trasformazione che i medesimi subiscono con l' avvento della dinamica newtoniana ».

La Commissione Spampinato, Miranda e Zappa riferisce sulle note: del dott. Pio Balsimelli, *Breve studio di una trasformazione birazionale dell' S_5 complesso determinata da una trasformazione quadratica biduale*; del dott. Angelo Fadini, *Studio di una trasformazione cremoniana dell' S dedotta da una trasformazione quadratica dell'* S_2 *triduale,* e della dott.

Rita Bruno, *Studio di una trasformazione cremoniana dell' S_8 dedotta da una trasformazione quadratica dell' S_2 tripotenziale,* concludendo con la proposta unanime di accoglierle per la stampa nel Rendiconto.

La Commissione Scorza, Miranda e Tolotti legge la relazione sulla nota del dott. Alberto Sambo, *Sulla derivazione delle funzioni composte,* proponendone l'inserzione nel Rendiconto. Uguale proposta di accoglimento nello stesso periodico fanno la Commissione Picone, Miranda e Tolotti per la nota del dr. Pietro Lesky, *Calcolo numerico: Ricerca di una funzione armonica soggetta a condizioni al contorno non lineari,* e la Commissione Cimmino, Miranda e Caccioppoli per la nota del dr. Bruno Pini, *Sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico nei domini non limitati.*

Con distinte votazioni l' Accademia accoglie alla unanimità tutte le sei note predette.

Il segretario presenta per il Rendiconto una nota del socio corrispondente Colacevich, che scusa l' assenza, dal titolo *Fotometria stellare a Capodimonte.*

Il socio De Lorenzo presenta, per il medesimo periodico, una sua nota: *Concezioni cosmiche di Leopardi,* e ne discorre.

Il socio Spampinato presenta due sue note *Sull' estensione del teorema di Lüroth dall' S_1 complesso ad un S_1 ipercomplesso* e la nota X sulle *Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n dell' S_r proiettivo complesso.*

Lo stesso socio presenta, per il Rendiconto, una nota della dott. Elda Cirillo *Sulle rappresentazioni complesse dell'* S_2 *tripotenziale.* Il presidente nomina la Commissione Spampinato, Miranda e Zappa con l' incarico di riferire su questa nota nella prossima tornata.

Il socio Zappa presenta una nota del dott. Giovanni Zacher *Sui gruppi finiti relativamente complementati.* Viene incaricata di riferire su tale lavoro la Commissione costituita dai soci Zappa, Spampinato e Miranda.

Constatato che il numero dei soci ordinari residenti presenti all' adunanza è sufficiente, a norma dell' art. 11 dello Statuto, per la validità delle votazioni alle cariche sociali, il presidente invita i soci a procedere, secondo l' ordine del giorno, alle elezioni del vice-presidente per l' anno 1953 e del segretario per il triennio 1953-55.

Il segretario legge gli articoli dello Statuto e del Regolamento relativi a tali votazioni e distribuisce le schede ai soci ordinari residenti.

La votazione, fatta a scrutinio segreto, dà i risultati seguenti:

1) *per la carica di vice-presidente per l' anno 1953:*

Soci ordinari presenti e votanti 13:

Carmelo Colamonico voti 12; scheda bianca 1.

2) *per la carica di segretario per il triennio 1953-1955:*

Soci ordinari presenti e votanti 13:

Geremia D'Erasmo voti 12; Giuseppe Imbò voti 1.

Annunziando il risultato di tali votazioni, il presidente avverte che, secondo l'art. 14 dello Statuto, esso sarà comunicato al Ministro della Pubblica Istruzione per l'approvazione del Capo dello Stato.

Processo verbale dell'adunanza del dì 6 dicembre 1952.

Assistono all'adunanza i soci ordinari residenti Bakunin (presidente), Carrelli, Colamonico, De Lorenzo, D'Erasmo (segretario), Galli, Giordani, Imbò, Malquori, Miranda, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato, Tolotti, Zappa; il socio ordinario non residente Armellini, ed i corrispondenti Beretta, Covello, Iacopetti, Orrù, Panizzi.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 8 novembre, che è approvato.

Il socio Colamonico offre un esemplare della relazione da lui presentata al XVII Congresso Internazionale di Geografia di Washington *(For a Land use Map of Italy)* insieme col foglio di saggio di una carta della utilizzazione del suolo che s'intende costruire per l'Italia. Egli illustra l'origine e gli scopi di questa carta: l'iniziativa fu presa al Congresso Geografico di Lisbona del 1949 e per una carta di tutta la Terra; a Lisbona venne nominata un'apposita Commissione in seno all'Unione Geografica Internazionale. La Commissione propose che la carta mondiale fosse pubblicata alla scala 1 : 1 milione, ma che essa derivasse possibilmente da carte a scale molto più grandi costruite con norme comuni nei singoli stati, dei quali quindi fu chiesta la collaborazione. L'Italia dette sin dal 1950, nel Congresso di Torino, la sua adesione; il centro studi di Geografia Economica di Napoli del CNR si assunse il compito della organizzazione del lavoro. Un saggio della carta è stato appunto presentato a Washington, e riguarda una parte dell'Italia centrale rientrante nei limiti della Toscana, dell'Umbria e delle Marche. La scala prescelta è 1 : 200 mila; la preparazione tecnica è stata compiuta dalla Direzione del Catasto; la stampa è opera dalla sezione cartografica del Touring Club Italiano. Il lavoro è stato molto apprezzato dalle centinaia di geografi di tutti i paesi convenuti a Washington. E' proposito del Centro studi suddetto di aggiornare e completare l'opera di rilevamento e di perfezionamento tecnico e, sotto gli auspici del CNR, procedere alla pubblicazione di questa carta agraria e forestale d'Italia.

Il socio Armellini presenta ed offre all'Accademia il suo volume, di recentissima pubblicazione, sopra *I fondamenti scientifici dell' Astrofisica,* e ne discorre.

Il socio D'Erasmo offre in omaggio un volume, recentemente pubblicato dall'Accademia Nazionale dei XL, riguardante la *Paleontologia di*

Sahabi in Cirenaica, ed al quale egli ha collaborato per le ricerche riflettenti i pesci.

Il presidente, a nome dell' Accademia, ringrazia i donatori.

La Commissione Spampinato, Miranda e Zappa riferisce sulla nota della dott. Elda CIRILLO, *Sulle rappresentazioni complesse dell'* S_2 *tripotenziale,* proponendone l' inserzione nel Rendiconto.

Uguale proposta di stampa nel medesimo periodico avanza la Commissione Zappa, Spampinato e Miranda per la nota del dott. Giovanni ZACHER dal titolo *Determinazioni dei gruppi d' ordine finito relativamente complementati.*

Entrambe le proposte sono accolte all' unanimità dall' Accademia.

Il socio Scherillo, tanto in nome proprio che dei colleghi De Lorenzo e D' Erasmo, legge la *Relazione sul concorso al premio biennale per il 1951-52 bandito dall' Accademia nel marzo 1951 sul tema « Contributo alla mineralogia vulcanica della Campania ».* La Commissione giudicatrice ha ritenuto che l' unico lavoro presentato al concorso e distinto dal motto « Campania felix » rappresenti un notevole contributo alla mineralogia vulcanica campana e che continui degnamente la tradizione mineralogica napoletana della scuola di Scacchi e Zambonini. Essa conclude pertanto con la proposta unanime che al lavoro predetto venga attribuito il premio di lire 50.000. — L' Accademia approva alla unanimità queste conclusioni, ed il segretario ricorda che, come è stabilito nel relativo bando di concorso, la busta suggellata contenente la scheda col nome dell' autore sarà aperta nell' adunanza plenaria del gennaio 1953 dal Presidente della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli.

Il socio Galli presenta, per il Rendiconto, una nota del dott. Cesare MONTUORI *Sul calcolo di progetto delle sezioni in cemento armato precompresso* ed un' altra del dott. Ettore MINERVINI dal titolo *Apparecchio elettrico per la determinazione delle caratteristiche della sollecitazione nei telai iperstatici.* — Il presidente nomina le Commissioni rispettivamente costituite dai soci Galli, Tolotti e Carrelli, e dai soci Galli, Tolotti e Iacopetti, perchè riferiscano su questi due lavori nella prossima adunanza.

INDICE DEL VOLUME

Redattore responsabile ai termini di legge: prof. U. PIERANTONI